KTH Matematik
Axel Hultman

SF1625 Envariabelanalys för CDATE1
Kontrollskrivning 3, version A, 2009-12-10

Varje uppgift är värd tre poäng. Fem KS-poäng garanterar minst tre poäng på uppgift 3 på tentamen. Sju KS-poäng ger fyra poäng på uppgift 3 på tentamen. Inga hjälpmedel är tillåtna. Motivera dina svar noggrant. Skrivtid: **09:15–10:15**.

1. **(a)** Bestäm Maclaurinpolynomet (d.v.s. Taylorpolynomet kring $x = 0$) av grad 4 för funktionen $\ln(1 + 4x^2)$.

(b) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 4x^2) - 4x^2}{x^4}.$$

2. Använd t.ex. partialbråksuppdelning för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

3. Konvergerar den generaliserade integralen

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2(x)\sqrt{1 - \tan(x)}}?$$

Tips. Använd substitutionen $u = 1 - \tan(x)$.

KTH Matematik
Axel Hultman

SF1625 Envariabelanalys för CDATE1
Kontrollskrivning 3, version B, 2009-12-10

Varje uppgift är värd tre poäng. Fem KS-poäng garanterar minst tre poäng på uppgift 3 på tentamen. Sju KS-poäng ger fyra poäng på uppgift 3 på tentamen. Inga hjälpmedel är tillåtna. Motivera dina svar noggrant. Skrivtid: **09:15–10:15**.

1. **(a)** Bestäm Maclaurinpolynomet (d.v.s. Taylorpolynomet kring $x = 0$) av grad 4 för funktionen $\ln(1 + 3x^2)$.

(b) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x^2) - 3x^2}{x^4}.$$

2. Använd t.ex. partialbråksuppdelning för att beräkna

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}.$$

3. Konvergerar den generaliserade integralen

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2(x)\sqrt{1 - \tan(x)}}?$$

Tips. Använd substitutionen $u = 1 - \tan(x)$.

Lösningsförslag

A1.

(a) Substituera $t = 4x^2$ i den kända Maclaurinutvecklingen $\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - \ldots$, så fås $\ln(1+4x^2) = 4x^2 - 8x^4 + O(x^6)$, varför $P_4(x) = 4x^2 - 8x^4$.

(b) Med hjälp av resultatet i (a) kan vi skriva

$$\frac{\ln(1+4x^2) - 4x^2}{x^4} = \frac{4x^2 - 8x^4 + O(x^6) - 4x^2}{x^4} = -8 + O(x^2)$$

som går mot -8 då $x \to 0$.

A2. Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

så vi har en teleskoperande serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1.$$

A3. Substitutionen $u = 1 - \tan(x)$ ger $du = -dx/\cos^2(x)$. Då x går från 0 till $\pi/4$ går u från $1 - \tan(0) = 1$ till $1 - \tan(\pi/4) = 0$. Vi får

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2(x)\sqrt{1-\tan(x)}} = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = [2\sqrt{u}]_0^1 = 2,$$

så integralen är konvergent.

B1.

(a) Substituera $t = 3x^2$ i den kända Maclaurinutvecklingen $\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - \ldots$, så fås $\ln(1+3x^2) = 3x^2 - 9x^4/2 + O(x^6)$, varför $P_4(x) = 3x^2 - 9x^4/2$.

(b) Med hjälp av resultatet i (a) kan vi skriva

$$\frac{\ln(1+3x^2) - 3x^2}{x^4} = \frac{3x^2 - 9x^4/2 + O(x^6) - 3x^2}{x^4} = -9/2 + O(x^2)$$

som går mot $-9/2$ då $x \to 0$.

B2. Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

så vi har en teleskoperande serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1.$$

B3. Se A3.