Dag 23. Generaliserade integraler

Rekommenderade uppgifter

6.5.2 Beräkna $\int_3^\infty \frac{1}{(2x-1)^{2/3}}\,dx$ eller visa att integralen divergerar.

Integranden har en singularitet vid $x = \frac{1}{2}$ (nämnaren noll), men eftersom $x = \frac{1}{2}$ inte tillhör integrationsområdet eller är en randpunkt påverkar inte denna singularitet konvergensen. Vi har istället att undersöka

$$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{dx}{(2x-1)^{2/3}} &= \lim_{R\to\infty}\int_3^R \frac{dx}{(2x-1)^{2/3}}\\ &= \lim_{R\to\infty}\Big[\tfrac{3}{2}(2x-1)^{1/3}\Big]_3^R\\ &= \lim_{R\to\infty}\big(\tfrac{3}{2}(2R-1)^{1/3} - \tfrac{3}{2}\cdot 5^{1/3}\big) = \infty.\end{aligned}$$

Alltså divergerar integralen.

6.5.4 Beräkna $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+1}$ eller visa att integralen divergerar.

Nämnaren är alltid ≥ 1 så vi har inga singulariteter. Vi har

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{-1}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty}\Big[\arctan x\Big]_{-R}^{-1}\\ &= \lim_{R\to\infty}\big(-\tfrac{1}{4}\pi - \arctan(-R)\big) = -\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

6.5.8 Beräkna $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx$ eller visa att integralen divergerar.

Integranden har två singulariteter, dels i $x = 0$, dels i $x = 1$. Vi delar upp integrationsområdet i två delar så att singulariteterna hamnar i varsin del

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int_0^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}.$$

Vi undersöker de två integralerna i högerledet separat.

1. I intervallet $[0, \frac{1}{2}]$ så är $\sqrt{1-x}$ avtagande, vilket ger att

   $$1 \leq \sqrt{1-x} \leq 1/\sqrt{2}.$$

   Alltså är

   $$\frac{1}{x\sqrt{2}} \leq \frac{1}{x\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{x}.$$

   Vi får därför att

   $$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{2}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{1/2}\frac{dx}{x},$$

   eller

   $$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{2\varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{1/2}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\log\frac{1}{2\varepsilon}.$$

   Eftersom

   $$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log\frac{1}{2\varepsilon} = \infty$$

   är den första integralen divergent enligt instängningsprincipen.

Eftersom den första integralen är divergent är det ingen mening att undersöka den andra integralen utan svaret är att integralen i uppgiftstexten är divergent.

6.5.10 Beräkna $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$ eller visa att integralen är divergent.

Integranden har inga singulariteter. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} xe^{-x}\,dx = \{\,\text{partialintegrering}\,\}\\ &= \lim_{R\to\infty}\Bigl(\Bigl[-xe^{-x}\Bigr]_0^R + \int_0^R e^{-x}\,dx\Bigr)\\ &= \lim_{R\to\infty}\Bigl(-Re^{-R} + \Bigl[-e^{-x}\Bigr]_0^R\Bigr)\\ &= \lim_{r\to\infty}\bigl(-Re^{-R} - e^{-R} + 1\bigr) = 1.\end{aligned}$$

6.5.24 Finn arean av området under $y = e^{-x}$, ovanför $y = e^{-2x}$ och till höger om $x = 0$.

Arean ges av integralen

$$\int_0^{\infty} \bigl(e^{-x} - e^{-2x}\bigr)\,dx.$$

Integranden har inga singulariteter. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \bigl(e^{-x} - e^{-2x}\bigr)\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} \bigl(e^{-x} - e^{-2x}\bigr)\,dx\\ &= \lim_{R\to\infty}\Bigl[-e^{-x} + \tfrac{1}{2}e^{-2x}\Bigr]_0^R\\ &= \lim_{T\to\infty}\Bigl(-e^{-R} + \tfrac{1}{2}e^{-2R} + e^0 - \tfrac{1}{2}e^0\Bigr) = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

6.5.30 Bestäm om $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^5+1}\,dx$ konvergerar eller divergerar.

Integranden har inga singulariteter i integrationsområdet. När vi ska bestämma om integralen konvergerar eller divergerar ska vi tänka stort,

$$\frac{x^2}{x^5+1} \approx \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3} \quad \text{för stora } x.$$

Eftersom vi vet att $\int dx/x^3$ konvergerar borde vår integral också konvergera.

Vi visar detta med en skattning. Vi har att $x^5 + 1 > x^5$ varför

$$\frac{x^2}{x^5+1} < \frac{1}{x^3}$$

och då är

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{x^2}{x^5+1}\,dx < \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^3} < \infty.$$

Notera att konvergensen inte påverkas av att vi ändrade integrationsområdet lite (vi vill inte använda jämförelsen nära $x = 0$).

Alltså är vår integral konvergent.