Förel 1: Om funktioner

Beteckning $\mathbb{R} = \{\text{alla reella tal}\}$

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x$ är ett reellt tal

$y \notin \mathbb{R} \Leftrightarrow y$ Ej reellt tal.

$A \Longrightarrow B$ (om A är sant så är B sant)

Negation

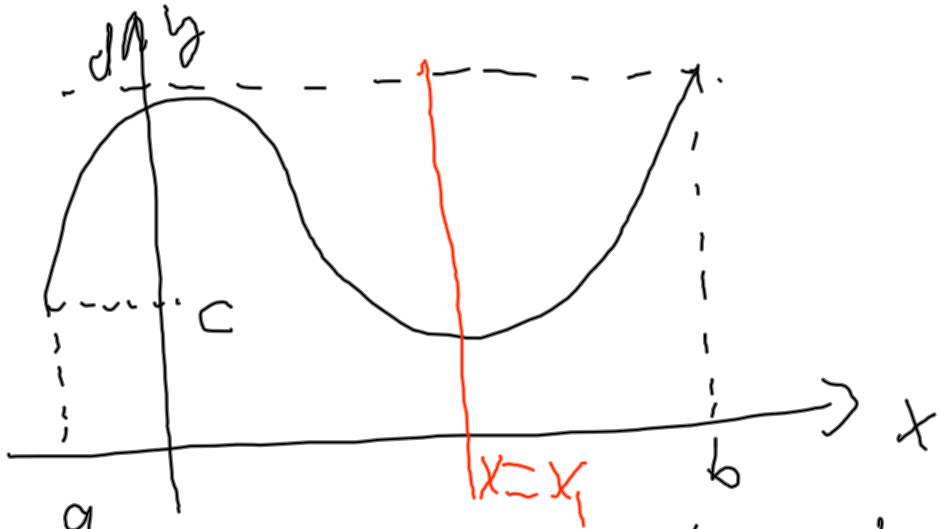
$\underbrace{(\text{icke } A)\ (\text{icke} \Longrightarrow)}\ (\text{icke } B)$

$\Longleftarrow$

$A \Longrightarrow B \Longleftrightarrow (\text{icke } B) \Longrightarrow (\text{icke } A)$

$\neg$

Funktionsbegrepp



$D(f) = \{x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ har en mening$\}$

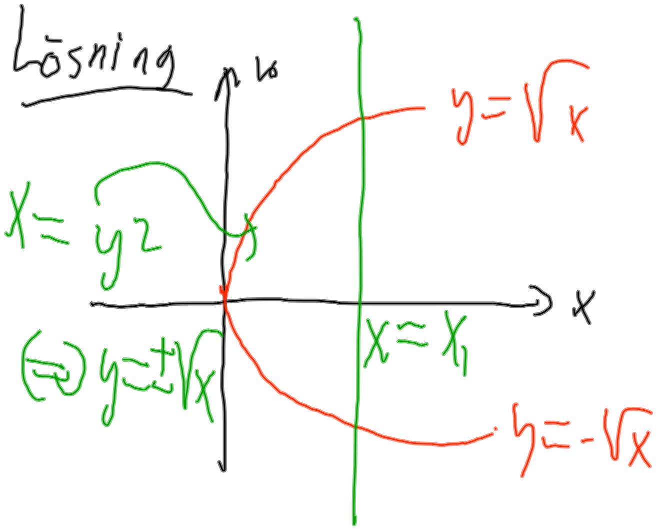
$V(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \in f(x),\ x \in D(f)\}$

Def 1 En funktion f (inte $f(x)$) är en avbildning som till varje $x \in D(f)$ ordnar precis ett $y \in V(f)$

Geometrisk: Varje linje $x = x_1$ $a \leq x_1 < b$ skär kurvan till f högst en gång

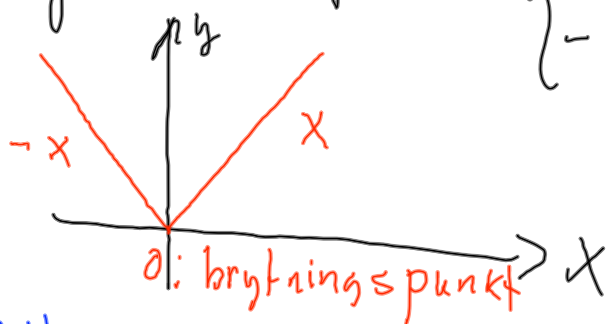
Bra Ex. Kan sambandet $x = y^2$ definierar en funktion $y = f(x)$?

Lösning



Svar: nej

Ex 2 $\quad y = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



$|x| \geq 0$

Svar: Ja!

ALLA elementära funktioner:

$p(x)$ = polynom, ${}^{a}\log(x)$, $\ln|x|$

e^x, a^x, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot g\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$, x^{α} $(x > 0)$

antas vara kända.

Hur finner man $D(f)$?

Finn för vilka $x \in \mathbb{R}$ är

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x-6}{x^2+2x-3}}$$ definierad

Lösning Problemet löses bäst m.h.a Teckentabell!

obs! $\sqrt{g(x)}$ definierad $\Leftrightarrow$ $g(x) \geq 0$ (om vi skall vara i $\mathbb{R}$)

där $g(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-3} \geq 0$

$x^2-x-6=0 \Rightarrow x=-2, 3$

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1, -3$

$$g(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+2x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+3)}$$

x		-3		-2		1		3	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	odef	$-$	0	$+$	odef	$-$	0	$+$

Svar $f(x) = \sqrt{g(x)}$ definieras då

$g(x) \geq 0$ dvs då

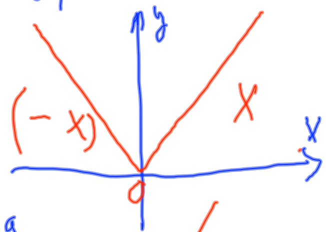
$x < -3$, $-2 \leq x < 1$, $x \geq 3$

$V(f)$: $0 \leq y < \infty$

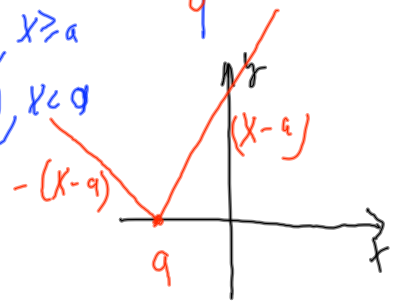
Om absolut belopp

uttrycket $|x|$ kallas för absolut belopp av x och är definierad

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



allm. $$|x-a| = \begin{cases} (x-a), & x \geq a \\ -(x-a), & x < a \end{cases}$$

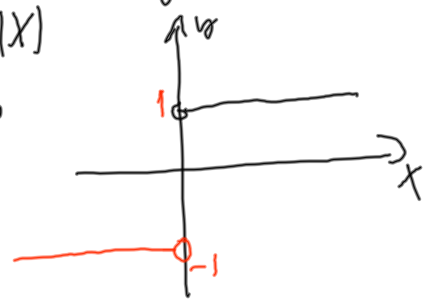


Ex3 $$\sqrt{\underbrace{x^2}_{\geq 0}} = \underbrace{|x|}_{\geq 0}$$

$$\sqrt{4} = 2 \quad (\text{inte } \pm 2)$$

Ex4 $$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x)$$

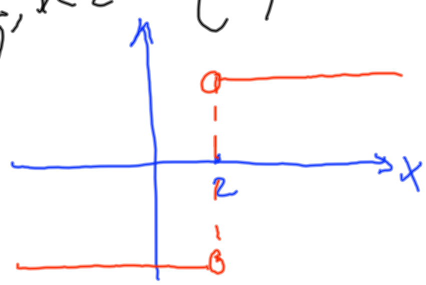
$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



Ex5

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}, \quad x \neq 2$$

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2}, & x > 2 \\ \frac{-(x-2)}{(x-2)}, & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$$



Bra EX att rita funktioner som innehålla tecken $|\cdot|$

Rita $f(x) = \left|1 - |x-1|\right| \geq 0$

Sätt $g(x) = 1 - |x-1|$

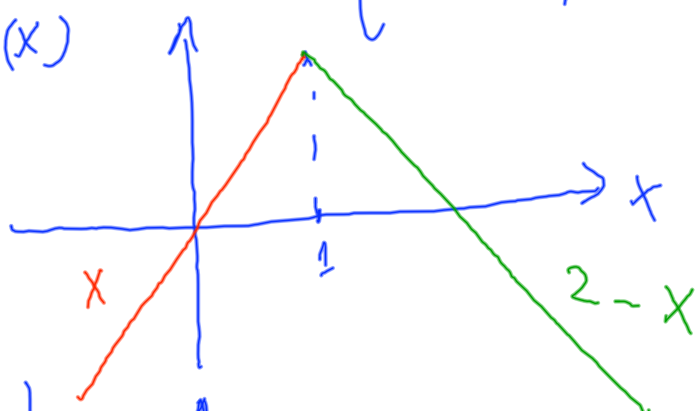
dvs $f(x) = |g(x)| \geq 0$

$$g(x) = 1 - |x-1| = \begin{cases} 1 - (x-1), & x \geq 1 \\ 1 - \left(-(x-1)\right), & x < 1 \end{cases}$$

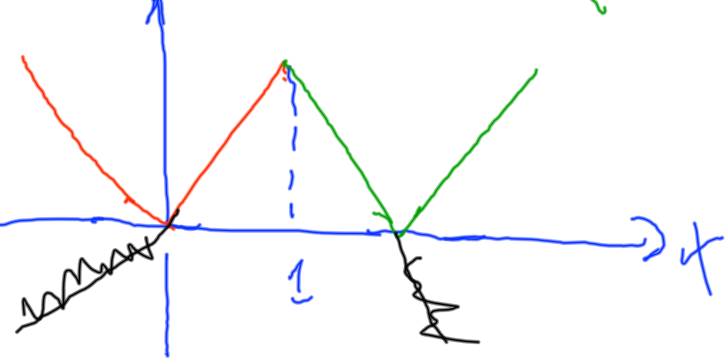
$$\left(|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow g(x) = 1 - |x-1| = \begin{cases} 2-x, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$$

Vi ritar $g(x)$



$f(x) = |g(x)|$



Rötter – potenser

För $a > 0$, $n =$ heltal ≥ 0

så har $x^n = a$ exakt en positiv

lösning $x_n = \sqrt[n]{a}$: n:te roten av a

man skriver

$$x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

rot form — potens form

Bra Ex att tänka på

Vilka av talen $n^{1/n}$

$n = 1, 2, 3, 4, \ldots,$ är störst!

Potensregler

$f(x) = a^x > 0$ Exponential fkn

1) $a^x a^y = a^{(x+y)}$ $\left(\neq a^{xy}\right)$

2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3) $\left(a^x\right)^y = a^{(xy)}$ $\left(\neq a^{x+y}\right)$

4) $(ab)^x = a^x b^x$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x} = a^x\left(b^{-x}\right)$

där $b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$

Bra ex Lös $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21$

$$\left[\ \ln\left(3^x + 2 \cdot 3^{x+1}\right) = \ln 21\right.$$

Vanligt fel

$$\underbrace{\ln(3^x) + 2\ln(3^{x+1})}_{\text{Fel}}$$

$$\ln(a+b) \neq \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Fel

Rätt metod!

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3 \qquad \left(3^{x+y} = 3^x \cdot 3^y\right)$$

Ekvationen kan skrivas

$$3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21 \iff$$

$$3^x + \underbrace{(2 \cdot 3)}_{6} \cdot 3^x = 21 \iff$$

$$\underbrace{3^x + 6 \cdot 3^x}_{} = 21 \iff$$

$$7 \cdot 3^x = 21 \iff$$

$$\cancel{7} \cdot 3^x = \cancel{7} \cdot 3 \quad \text{Sant}$$

$x = 1$ Ty $3^x = 3^1$