Förel nr 2: Repetition av elementära fkner

1. Logaritmer med bas $a>0$ $(a=e)$

Problem: för $x>0$, sök y: $\underbrace{a}_{>0}^{y}=\underbrace{x}_{>0}$

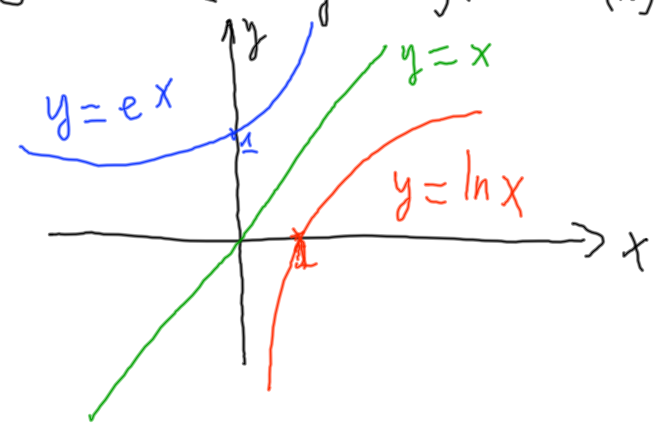
Svar $a^y=x \iff y={}^a\log(x)$

Vi säger att $y={}^a\log(x)$ är inversen till $x=a^y$

obs 1 $\boxed{{}^a\log(x) \text{ definierad endast för } x>0 \quad \text{Vidare } {}^a\log(a)=1}$

Vi har

$$a^y=x \iff y={}^a\log(x)$$
$$10^y=x \iff y={}^{10}\log(x)=\lg(x)$$
$$e^y=x \iff y={}^e\log(x)=\ln(x)$$



Ex 1 $e^{\ln x}=x$

obs 2 $$\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{\left(\ln|f(x)|^{g(x)}\right)}=e^{g(x)\cdot\ln|f(x)|}$$

$f(x)\neq 0$

Viktiga Regler $(x>0,\ y>0)$

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y \neq \ln(x+y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \neq \frac{\ln x}{\ln y}$
- $\ln\left(x^{\alpha}\right) = \alpha \ln x$

obs 2 $\quad \ln(x+y) \neq \ln x + \ln y$

Sätt in $x = e$, $y = 1$

$$\ln(e+1) = \underbrace{\ln e}_{=1} + \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

$$\ln(e+1) \neq 1$$

obs 3 $\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{\ln x}{\ln y}$

sätt in $x = e$, $y = 1$

$$\underbrace{\ln\left(\frac{e}{1}\right)}_{\ln(e)=1} = \frac{\ln(e)}{\ln(1)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Lös ekvationen $\ln(x^2+x-3) = \ln(x+1)$

Lösning $\ln(A) = \ln(B) \Longrightarrow A = B$ pga kontinuitet $\ln(x)$

$\ln(x^2+x-3 = \ln(x+1) \Longrightarrow$

$x^2+x-3 = x+1 \Longrightarrow x^2 = 4$

$\Longrightarrow x = \pm 2$

Kontrollera svaret: Dvs sätt $x = 2, -2$ i den givna ekvationen

$x=-2$: $\ln((-2)^2-2-3) = \ln(\underbrace{-2+1}_{-1}) = \ln(-1)$ o def.

$x=2$: $\ln(\underbrace{2^2+2-3}_{3}) = \ln(\underbrace{2+1}_{3})$

$\Longrightarrow \ln(3) = \ln(3)$

Svar $\ln(x^2+x-3) = \ln(x+1)$ då $x = 2$

Ex För vilka x gäller

$4^{2x+1}\,8^{x^2} = 2^x\,4^{x^2}$

Lösning Använd ln-räknelagarna

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad a>0, b>0$

$\ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$

Vi får

$\ln(4^{2x+1} \cdot 8^{x^2}) = \ln(2^x \cdot 4^{x^2})$

$\Rightarrow \ln(4^{2x+1}) + \ln(8^{x^2}) = \ln(2^x) + \ln(4^{x^2})$

$\Rightarrow (2x+1)\underbrace{\ln(4)}_{\ln(2^2)} + x^2 \underbrace{\ln(8)}_{\ln(2^3)} = x\ln(2) + x^2 \underbrace{\ln(4)}_{\ln(2^2)}$

$\Rightarrow (2x+1)\cdot 2 \cdot \ln(2) + x^2 \cdot 3 \cdot \ln(2) = x\ln(2) + 2 \cdot x^2 \ln(2)$

$\Rightarrow ((2x+1)\cdot 2 + 3x^2)\cancel{\ln(2)} = (x+2x^2)\cancel{\ln(2)}$

$\Rightarrow ((2x+1)\cdot 2 + 3x^2) = (x+2x^2)$

$\Rightarrow (\underbrace{(2x+1)\cdot 2 + 3x^2 - (x+2x^2)}_{x^2+3x+2}) = 0$

$\Rightarrow x^2+3x+2 = 0 \Longrightarrow x = -1, -2$

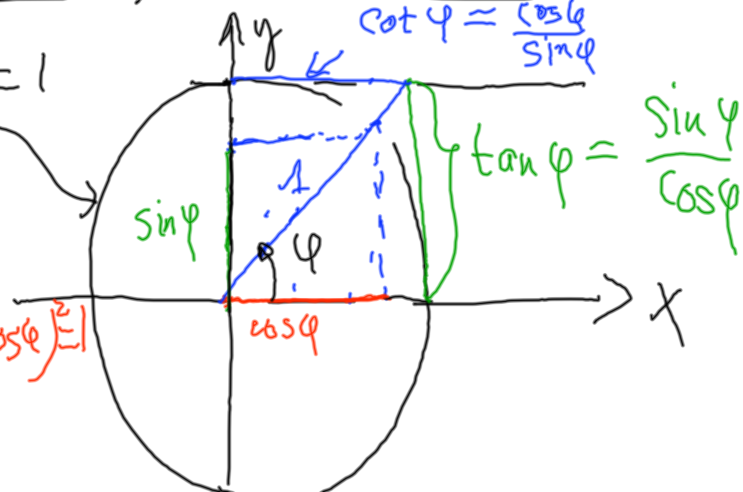
Kontrollera svaret genom att
sätta in $x=-1$ och $x=-2$ i
den givnna ekvationen

$$4^{2x+1} \cdot 8^{x^2} = 2^x \cdot 4^{x^2}$$

GDS svar $x=-1, -2$

2. Om Trigonometriska funktioner

$x^2+y^2=1$



$(\sin\varphi)^2+(\cos\varphi)^2=1$

Trigonometriska Ekvationer

- $\sin(\underset{\text{okänd}}{x}) = \sin(\underset{\text{känd}}{a}) \Longrightarrow x = \begin{cases} a+2\pi n \\ \pi - a + 2\pi n \\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots \end{cases}$

- $\cos(x)=\cos(a) \Rightarrow x = \pm a + 2\pi n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

- $\tan(x)=\tan(a) \Rightarrow x = a + n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Några kända formler

$$\sin^2(a)+\cos^2(a)=1$$

$$\sin(a\pm b)=\sin(a)\cos(b)\pm\sin(b)\cos(a)$$

om $x=a=b$

$$\sin(2x)=2\sin x\cos x$$

$$\cos(a\pm b)=\cos(a)\cos(b)\mp\sin(a)\sin(b)$$

$x=a=b$

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$$

Bra Ex Lös $\sin(2x) = \sin(x)$ (*)

Lösning

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

(*) blir: $2\sin x \cos x = \sin x$

$\Rightarrow 2\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow 2\sin x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \dots \\ \cos x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$\cos x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \dots$

Svar $\sin 2x = \sin x$

har lösningar

$x = n\pi$ eller $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

Binomial formeln: handlar om att räkna ut $(a+b)^n$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Def $n! = \underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(n-1)}_{(n-1)!}\cdot n$

uttalas n fakultet!

$\boxed{0! = 1! = 1}$

EX $3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$

Vad innebär $n!$?

$n!$ = antalet sätt att sortera n element i en viss ordning
= antalet permutationer
= antalet "password" av n olika element (utan repetition)

EX $M = \{1,2,3\}$

$n! = 3! = 6$ Vilka?

123, 132, 231, 213, 312, 321

Def $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $n>k$

uttalas "n över k"

= antalet delmängder av storlek $\boxed{k}$ av en mängd av $\boxed{n}$ element

EX 3 tennis spelare skall möta varandra. Hur många matcher?

Här $n=3$, $k=2$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \left[\begin{matrix} n=3 \\ k=2 \end{matrix}\right] = \frac{\overset{6}{3!}}{\underbrace{(3-2)!}_{=1}\cdot\underbrace{2!}_{2}} = 3$

Räknelagar

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

3) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Visas lätt med $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Binomial formeln

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Bra EX Finn koefficienten framför x^{13} i polynomet $(x+1)^{15}$

Lösning $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Sätt $a=x$, $b=1$, $n=15$

$$(x+1)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{15-k} \underbrace{1^k}_{=1}$$

Koefficienten framför x^{15-k} är $\binom{15}{k}$

Sätt $k=2$

$x^{15-2} = x^{13}$ blir koeff.

$$\binom{15}{2} = \frac{15!}{(15-2)!\,2!} = \frac{\cancel{13!}\,\cancel{14}^{7}\cdot 15}{\cancel{13!}\,\cancel{2!}} = 7\cdot 15 = 105$$