Föreln:o 3. Sammansatta funktioner
- Inverser!

Def Funktionerna f och g säges vara sammansatt om
$h(x) = f[g(x)]$.

beteckning $h = f \circ g$

Ex: $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \sin x$
$f[g(x)] = \ln(\sin x)$

Ex 2 $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f): x \geq 0$
$g(x) = x+1$, $D(g) = \mathbb{R}$

bilda: $(f \circ g)(x) = f[g(x)] =$
$= [y = g(x)] = f[y] = \sqrt{y} =$
$[y = x+1] = \sqrt{x+1}$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$, $D(f \circ g): x \geq -1$

Bilda
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [t = f(x)] =$
$g(t) = t+1 = [t = f(x) = \sqrt{x}] =$
$= 1 + \sqrt{x}$

$(g \circ f)(x) = 1 + \sqrt{x}$, $D(g \circ f): x \geq 0$
$(f \circ g)(x) = \sqrt{x+1}$, $D(f \circ g): x \geq -1$

Slutsats $(g \circ f) \neq f \circ g$

En bild ; svarta låda

$$x \to \boxed{f} \xrightarrow{y=f(x)} \boxed{g} \to g(y) = g[f(x)]$$

$$x \to \boxed{g} \xrightarrow{y=g(x)} \boxed{f} \to f(y) = f[g(x)]$$

$$(f \circ g) \neq g \circ f$$

Om Inversen

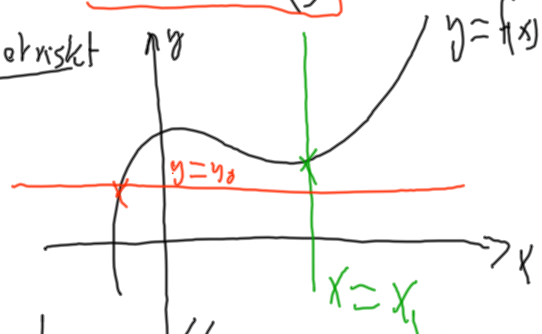
Def $\quad f : \underbrace{D(f)}_{x\text{-axeln}} \longrightarrow \underbrace{V(f)}_{y\text{-axeln}}$

f sägs vara omvändbar (Injektiv, 1-1) om

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \in D(f) \\ x_2 \in D(f) \\ x_1 \neq x_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

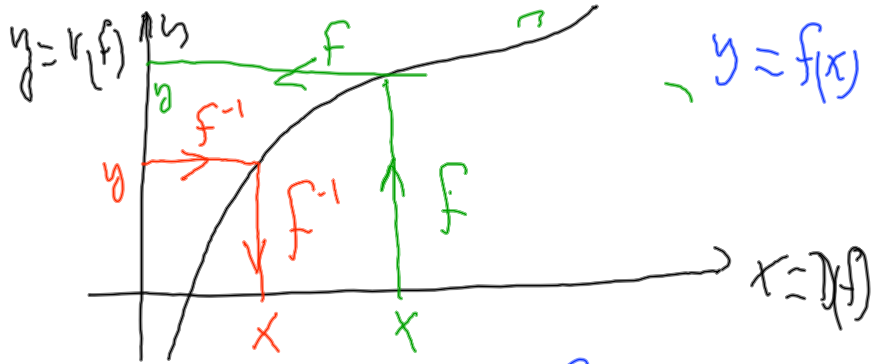
Dvs f har en invers $\Longleftrightarrow$ Varje element $\boxed{y \in V(f)}$ är bilden av endast $\boxed{\text{ett } x \in D(f)}$

Geometriskt



Varje linje // x-axeln $(y = y_0)$ träffar kurvan till $y = f(x)$ högst en gång

Inversen tecknas $\boxed{f^{-1}(x)} \neq \dfrac{1}{f(x)}$



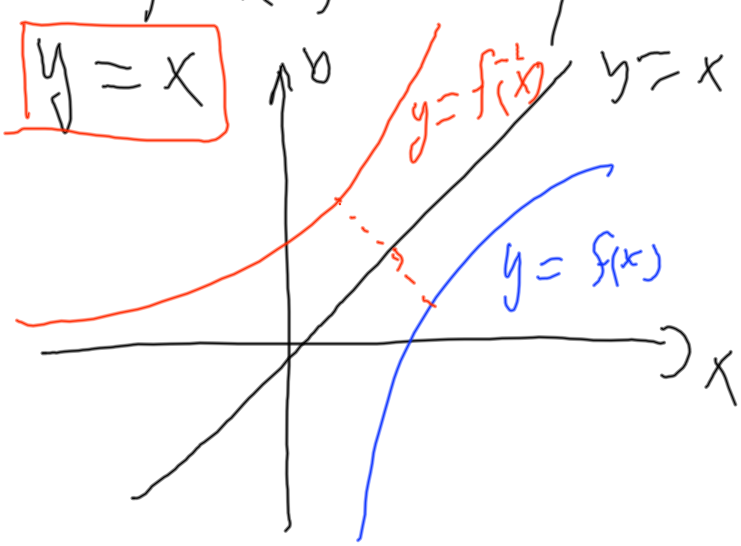
$f: D(f) \to V(f) \xrightarrow{f^{-1}} D(f)$

$x \to y \longrightarrow x$

$x \to \boxed{f} \xrightarrow{y=f(x)} \boxed{f^{-1}} \to f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$

$y \to \boxed{f^{-1}} \xrightarrow{x=f^{-1}(y)} \boxed{f} \to f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$

dvs att kurvan $y = f^{-1}(x)$ är spegelbild av kurvan $y = f(x)$ m.a.p $\boxed{y = x}$

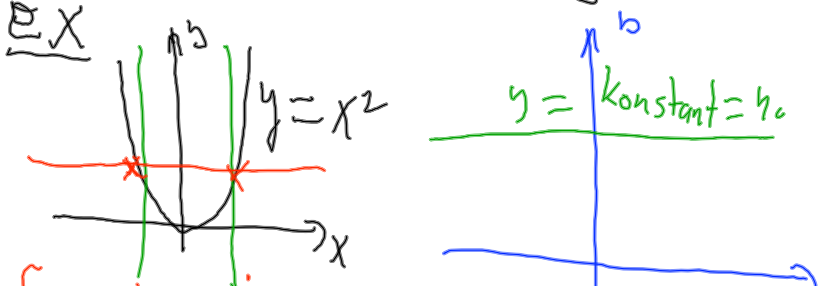


Problem Vilka funktioner f har en invers?

Svar f skall vara injektiv (1-1)

om f är "snäll". Då gäller att $f'(x) > 0$ eller $f'(x) < 0$ så har f en invers

Ex



f saknar invers
$f'(x) = 2x$

Saknar invers
$f'(x) = 0$

Hur gör man för att hitta inversen

Om vi vet att f har en invers så räknar vi inversen via

1) ur ekv. $y = f(x)$ lös ut x som en funktion av y

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

2) byt x mot y i $x = f^{-1}(y)$ och får

$$y = f^{-1}(x)$$

BRA EX Funktionen $y = \frac{2x+5}{x-1}$

har en invers.

Bestäm inversen på formen $y = f^{-1}(x)$

Lösning

$y = \frac{2x+5}{x-1} \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$y = \frac{2x+5}{x-1} \Leftrightarrow y(x-1) = 2x+5 \Leftrightarrow$

$yx - y = 2x+5 \Leftrightarrow yx - 2x = y+5$

$\Leftrightarrow x(y-2) = y+5 \Leftrightarrow$

$x = \frac{y+5}{y-2} = f^{-1}(y)$

Byt x mot y för att få
$y = f^{-1}(x)$

$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = \frac{y+5}{y-2}$ $(x \leftrightarrow y)$

$y = \frac{x+5}{x-2} = f^{-1}(x)$

Svar inversen på formen
$y = f^{-1}(x) = \frac{x+5}{x-2}, \; x \neq 2$

Alt 2 $y = f(x)$, byt $x \rightarrow y$
och sedan lös ut $y = f^{-1}(x)$

$y = \frac{2x+5}{x-1}$ byt $x \leftrightarrow y$

$x = \frac{2y+5}{y-1}$, lös ut $y = f^{-1}(x)$

$x(y-1) = 2y+5 \Leftrightarrow xy - x = 2y+5$

$$xy - x = 2y + 5 \iff \underbrace{xy - 2y}_{y(x-2)} = x + 5$$

$$\iff y(x-2) = x + 5$$

$$\implies y = \frac{x+5}{x-2} = f^{-1}(x)$$

Arcusfunktionerna är inverser till trigonometriska grundfunktionerna (se boken sid 116-121)

1. $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi/2$, $-1 \le y \le 1$

$y' = \cos x > 0$ i $-\pi/2 < x < \pi/2$

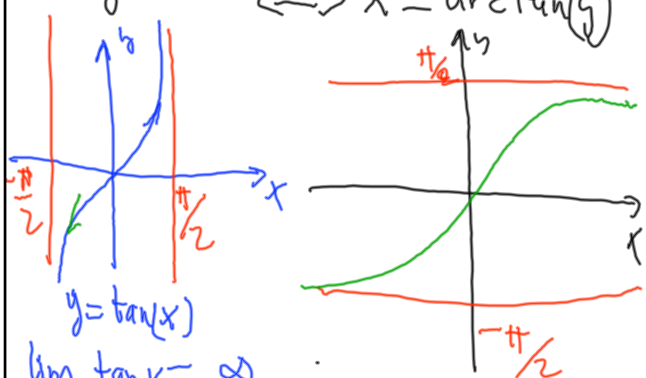
Inversen är $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$

2. $y = \tan x$ $-\frac{\pi}{2} < x < \pi/2)$ $-\infty < y < \infty$

Inversen $f^{-1}(x) = \arctan x$

$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan(y)$



$\lim_{x \to \pi/2} \tan x = \infty$

$\lim_{x \to -\pi/2} \tan x = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \pi/2$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$

3. $y = \cos x$ $0 \le x \le \pi$, $-1 \le y \le 1$

Inversen $f^{-1}(x) = \arccos x$

$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$

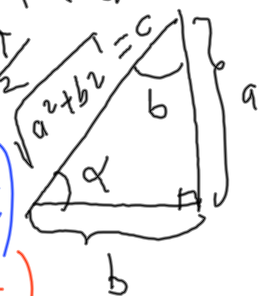
4. $y = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$0 < x < \pi$, $-\infty < y < \infty$

Inversen $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x)$

Att förstå: cyklometriska funktioner = arcus fkner

$0<\alpha<\pi/2,\ 0<\beta<\pi/2,\ \alpha+\beta=\pi/2$



$\sin\alpha=\frac{a}{c} \Leftrightarrow \alpha=\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$

$\cos\alpha=\frac{b}{c} \Leftrightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{b}{c}\right)$

$\tan\alpha=\frac{a}{b} \Leftrightarrow \alpha=\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$

$\cot\alpha=\frac{b}{a} \Leftrightarrow \alpha=\operatorname{arccot}\left(\frac{b}{a}\right)$

<u>Ex</u> Finn $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha=\pi/6$

$\beta=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \beta=\pi/3$

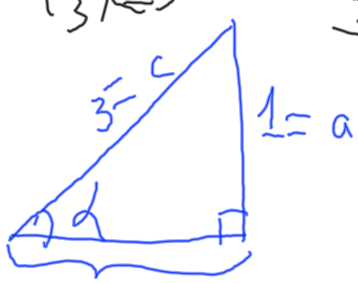
<u>Svar</u> $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi/6+\pi/3=\pi/2$

<u>Ex</u> Finn $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

<u>Lösning</u>

Sätt $\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{3}$

$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$



$c^2=a^2+b^2$

$\Leftrightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

$b=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$

$\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{8}}{3}$

Bra EX Finn

$$\sin\Big(\underbrace{\arcsin\left(\tfrac{7}{8}\right)}_{\alpha} + \underbrace{\arccos\left(\tfrac{1}{4}\right)}_{\beta}\Big)$$

$$= \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

Steg 1 Jobba med α.

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{7}{8}\right) \iff \sin\alpha = \frac{7}{8}$$

Finn $\cos\alpha$, t ex en $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{7^2}{8^2}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Här $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$, $\sin\alpha = \frac{7}{8}$

Steg 2 Jobba med β

$\beta = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{1}{4}$

Finn $\sin\beta$ m $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\Rightarrow \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos\beta = \frac{1}{4}, \ \sin\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Svar $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$= \frac{7}{8}\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{11}{16}$