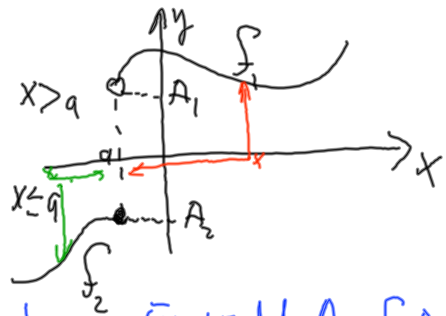
Förel nr 4: Gränsvärden – kontinuitet

Def

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x > a \\ f_2(x), & x \le a \end{cases}$$



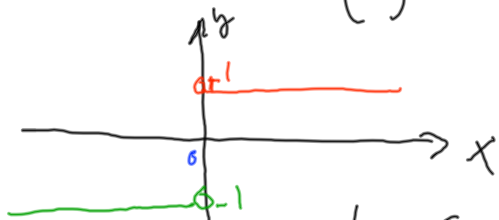
a) f säges ha gränsvärdet A_1 från höger till $x = a$ om $\lim_{x \to a+} f(x) = A_1$

b) f säges ha gränsvärdet A_2 från vänster till $x = a$ om $\lim_{x \to a-} f(x) = A_2$

c) Vi säger att $f(x)$ har gränsvärdet A om $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$

Ex 1

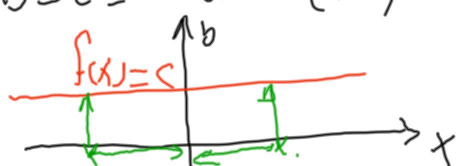
$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 \ne -1 = \lim_{x \to 0-} f(x)$$

$f(x)$ saknar gränsvärde i $x = 0$

Ex 2 $f(x) = c =$ konstant (>0)

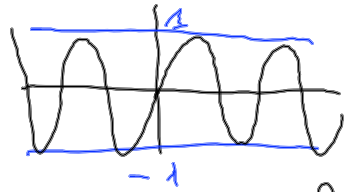


$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \text{konstant} = \text{konstant}$$

januari 25, 2010

Ex3

$f(x) = \sin x$



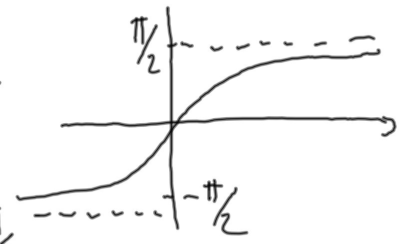
$-1 \le \sin x \le 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \sin x = \pm 1$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$ finns inte

p.s.s $-1 \le \cos x \le 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cos x = \pm 1$ (finns inte)

Ex4



$\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \pi/2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$

$y = \frac{\pi}{2}, -\pi/2$ är vågräta asymptoter

Ex5 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$

Lösning

För $x>0$, förenkla:

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2} = \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x^2}} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1$$

Ex (gam. KS) Finn ev $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4-x}}{x}$

Lösning

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4-x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ odef.}$$

steg 1 förenkla via sk konjugatregel

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$x \neq 0 \quad \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4-x}}{x} = \frac{(\overbrace{\sqrt{x+4}}^{a} - \overbrace{\sqrt{4-x}}^{b})(\overbrace{\sqrt{x+4}}^{a} + \overbrace{\sqrt{4-x}}^{b})}{x\,(\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{4-x})^2}{x(\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x})} = \frac{(x+4) - (4-x)}{x(\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x})}$$

$$= \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x})}$$

steg 2 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4+0} + \sqrt{4-0}} = \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

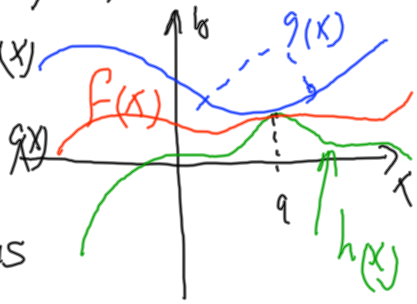
Räknelagar finns på sid 136

Speciellt : Instägningssatsen

Om (1) $h(x) \le f(x) \le g(x)$

(2) $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)$ finns



Tillämpning $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \left[t = \frac{1}{x}, \; x \to 0 \Leftrightarrow t \to \infty \right]$

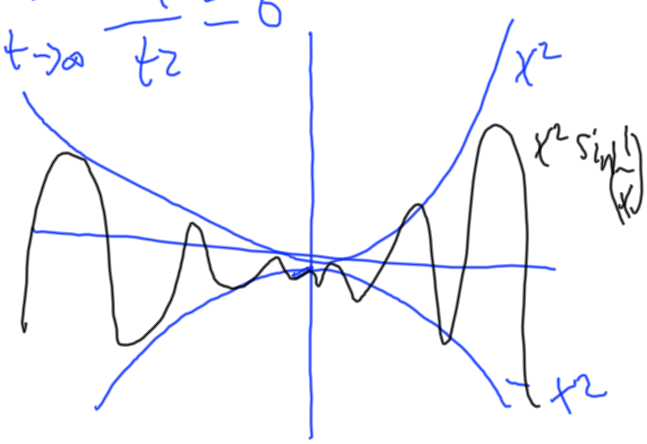
$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^2} \sin t = \lim_{t \to \infty} \frac{\sin t}{t^2}$

Vet att $-1 \le \sin t \le 1$

$$-\frac{1}{t^2} \le \frac{\sin t}{t^2} \le \frac{1}{t^2}$$

$t \to \infty$: $-\frac{1}{t^2} \to 0$ $\qquad$ $t \to \infty$: $\frac{1}{t^2} \to 0$

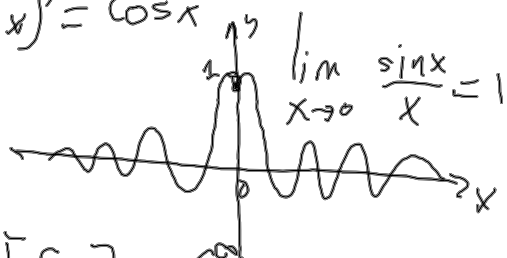
$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{\sin t}{t^2} = 0$



Viktigt resultat: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

används för att beräkna derivatan till
$(\sin x)' = \cos x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\underbrace{\mathcal{F}\left[f(t)\right]}_{\hat{f}(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{it\omega}\, dt$$

Ex $\lim_{x \to a} \frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2} \quad (a \neq 0)$

Lösning

$x \neq a$, $\frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2} = \frac{\sin(x-a)}{(x-a)(x+a)}$

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2} = \lim_{x \to a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)} \cdot \frac{1}{x+a} =$$

$$\left[\begin{array}{l} t = x-a \\ t \to 0 \Leftrightarrow x \to a \end{array}\right] = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{1}{t+2a} =$$

$$\underbrace{\left(\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}\right)}_{=1} \left(\frac{1}{\underbrace{\lim_{t \to 0} (t+2a)}}\right) = 1 \cdot \frac{1}{0+2a} = \frac{1}{2a}$$

Ex $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$x \neq 0$ förenkla

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \left[(a-b)(a+b) = a^2 - b^2\right] =$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)}{x^2}\frac{(1+\cos x)}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

VET $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$$= \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{1}{(1+\cos x)}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\cos x)}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

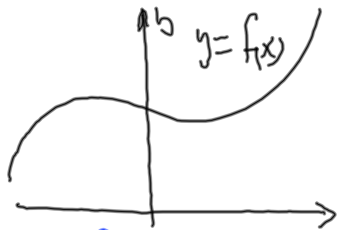
$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)} = 1^2\,\frac{1}{(1+\cos(0))}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\ \#$$

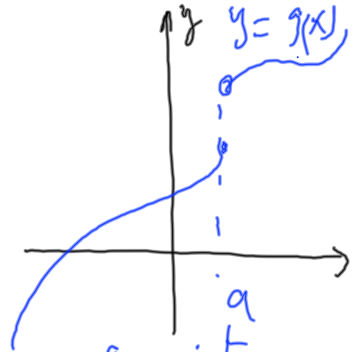
Obs om $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Kontinuitet



$y = f(x)$ är kontinuerlig för alla x



g är inte kontinuerlig i $x = a$

Def. f säges vara kontinuerlig i $x = a$

om ① $\lim_{x \to a} f(x) = A$ finns

② $A = f(a)$ skall

(1) och (2) kan skrivas

f kontinuerlig i $x = a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

obs! ALLA elementära funktioner är kontinuerliga i dess def. mängd

Typiska problem

Problem 1

Är $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a \\ A, & x = a \end{cases}$

kontinuerlig i $x = a$?

Svar f kontinuerlig i $x = a \iff$

$\lim_{x \to a} g(x) = A = f(a)$

Problem 2

Är $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < a \\ f_2(x), & x > a \end{cases}$

Kontinuerlig i $x = a$?

Svar f kontinuerlig i $x = a \iff$

$$\lim_{x \to a_-} f_1(x) = \lim_{x \to a_+} f_2(x)$$

Förstå skillnaden

a) f definierad i $x = a$

b) f kontinuerlig i $x = a$

Bra Ex $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$

Är f kontinuerlig i $x = 2$?

Lösning a) f ä definierad för alla $x \in \mathbb{R}$. f i $x = 2$ än definierad via $f(2) = 1$

b) f ä kontinuerlig fä alla $x \neq 2$

f blir kontinuerlig i $x = 2 \iff$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 1$$

$x \neq 2$: förenkla $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} x+2 = 2+2 = 4 \neq 1$$

Vi ritar

$$\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$$