KTH Matematik
Hans Thunberg

Kompletterande kurslitteratur om serier

I Persson & Böiers 2.5.4 introduceras serier, och serier diskuteras också i kapitel 7.9. Innan du läser vidare här skall du ha läst dessa avsnitt och räknat tillhörande rekommenderade övningar.

Här nedan används beteckningar och definitioner från Persson & Böiers utan vidare förklaring.

1. Allmänna termen går mot noll är nödvändigt men inte tillräckligt för konvergens

Vi börjar med att formulera ett nödvändigt villkor för att en serie skall vara konvergent.

En serie är konvergent om följden av delsummor närmar sig ett bestämt värde, d v s när man adderar fler och fler termer så “bromsar summan in” och närmar sig ett gränsvärde. Om detta ska ha en chans att inträffa måste termerna bli mindre och mindre och närma sig 0. Mer precist formulerat får vi följande

Sats 1. Om serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerar så gäller att $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bevis. Beviset består av en formalisering av resonmenaget som föregår Sats 1. Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerar mot värdet L, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$. Detta är defintionsmässigt detsamma som att följden av delsummor konvergerar mot L, dvs

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \qquad \text{och} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = L.$$

Vi observerar också att $a_n = s_n - s_{n-1}$. Detta ger att

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L - L = 0.$$

Sats 1 är därmed bevisad.

Sats 1 är kanske mest användbar i följande (logiskt ekvivalenta) omformulering:

Sats 1, alternativ formulering. Om $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ är serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Denna formulering ger ett verktyg för att visa att serier *inte* är konvergenta.

Exempel 1.

- Serien $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ är divergent eftersom $\lim_{k\to\infty}(-1)^k$ inte existerar.
- Serien $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ är divergent eftersom $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=1\neq 0$.

Tänk själv igenom hur delsummorna skulle se ut i dessa två exempel, och övertyga dig själv om att serierna måste vara divergenta, och att skälet till detta är precis det allmänna faktum som har formulerats i Sats 1.

Viktigt! Observera att Sats 1 endast ger ett *nödvändigt* villkor för konvergens. Med andra ord finns det gott om serier där $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ men $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är divergent. Se t ex Exempel 26 (sidan 172) i Persson & Böiers där man visar att

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

är divergent. Exempel 22 på sidan 344 visar mer generellt att $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ är divergent om $\alpha \leq 1$, och konvergent för $\alpha > 1$.

Det räcker alltså inte att allmänna termen går mot noll för att en serie ska konvergera, det krävs något mer. För *icke-negativa serier*, $a_n \geq 0$ för alla n, skulle man kunna säga att det som krävs är att termerna går mot noll *tillräckligt snabbt*. Situationen är snarlik den för generaliserade integraler, jfr. Exempel 15 (sid 305) och Sats 11 (sid 306) i Persson & Böiers.

2. Positiva serier

En serie kallas positiv (icke-negativ) om alla dess termer är > 0 (≥ 0). På motsvarande sätt kallas en serie negativ (icke-positiv) om alla dess termer är < 0 (≤ 0).

Exempel 2.

- Serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{k}$ varken positiv, icke-negativ, negativ eller icke-positiv.
- Serien $\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ är positiv (och därmed också icke-negativ)
- Serien $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{1+k^2}$ är icke-positiv, men inte negativ.

För positiva serier finns ett antal tester med vars hjälp man kan avgöra konvergens; vi ska här titta på några utav dessa. (Ett test för positiva serier kan direkt omformulers till ett test för negativa serier. Hur då?)

Att det är lättare att studera konvergens för serier där alla termer har samma tecken än för serier med såväl positiva som negativa termer kommer sig av att för positiva serier finns det bara två möjligheter:

(i) antingen divergerar serien mot $+\infty$, eller så

(ii) konvergerar den mot ett ändligt tal.

Jämför med situationen för generaliserade integraler av positiva funktioner.

För serier med oändligt många såväl positiva som negativa termer kompliceras det hela av att följden av partialsummor kan oscillera och av att termerna kan ta ut varandra på olika sätt.

3. Dominerad konvergens för positiva serier

Sats 2 Antag att $0 \le a_k \le b_k$ för alla $k = 0, 1, 2 \dots$. Då gäller att

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{konvergerar} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{konvergerar;}$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{divergerar} \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{divergerar.}$$

Bevisidé. Antag att $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergerar och är $= L$. Det betyder att delsummorna $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ alla är $\le L$. Men eftersom $a_k \le b_k$ för alla k, måste även delsummorna $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ alla vara $\le L$. Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är en icke-negativ serie enligt förutsättningarna måste den antingen divergerar mot $+\infty$, men det är uteslutet då delsummorna aldirg blir större än L, eller konvergera mot ett ändligt tal, vilket alltså är den enda kvarvarande möjligheten. Vi har bevisat (i). Påstående (ii) följer direkt från (i).

Sats 11 sidan 306 i Persson & Böiers är ett helt analogt påstående om generaliserade integraler.

Exempel 3. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2+k)^k}$ är konvergent eller divergent.

Vi vet att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ är konvergent eftersom det är en geometrisk serie med kvot 1/2. Vi ser också att termerna i den givna serien är positiva och domineras av denna geometriska serie, d v s

$$0 \le \frac{1}{(2+k)^k} \le \frac{1}{2^k}, \qquad \text{för alla } k \ge 1.$$

Av Sats 2 följer att $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2+k)^k}$ är konvergent.

Exempel 4. Avgör om serien $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^{3/2}-1}$ är konvergent eller divergent.

För stora värden på n borde $\dfrac{n+1}{n^{3/2}-1}$ vara av samma storleksordning som $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Då vi vet att $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ är divergent (Se Persson & Böiers Exempel 22 sidan 344) ger Sats 2 oss en möjlighet att visa att den givna serien är divergent om vi lyckas visa att $\dfrac{n+1}{n^{3/2}-1} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ för alla heltal $n \geq 2$. Vi har att

$$\frac{n+1}{n^{3/2}-1} > \frac{n}{n^{3/2}-1} > \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Alltså är $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^{3/2}-1}$ divergent.

Exempel 5. Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ är konvergent eller divergent.

Vi har att

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1},$$

och följaktligen är

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Eftersom den geometriska serien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ är konvergent följer det enligt Sats 2 att $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ också är konvergent.

I Exempel 3 visade vi $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^{3/2}-1}$ är divergent, genom att visa att termerna var större än motsvarande termer i den divergenta serien $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Betrakta nu istället serien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n^{3/2}+1}$. Å ena sidan känns det som om denna serie borde bete sig precis likadant, dvs divergera, eftersom de två teckenändringarna borde vara helt betydleselösa för stora värden på n. Men vi kan inte använda Sats 2 direkt, eftersom en enkel uppsakttning av termernas storlek "går at fel håll", $\dfrac{n-1}{n^{3/2}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ett sätt att komma runt denna svårighet är t ex att försöka visa att $\dfrac{n-1}{n^{3/2}+1} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$; serien med termer $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ är divergent (Varför då?) och nu "går olikheten åt rätt håll". Ett enklare sätt är att använda Jämförelsetestet för positiva serier.

4. Ett jämförelsetest för positiva serier

Sats 3. Antag att $a_k > 0$ och $b_k > 0$ för alla $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, och antag också att $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ existerar som ett egentligt nollskilt gränsvärde, d v s

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L, \qquad L \neq 0, \pm\infty.$$

Då gäller att antingen är båda serierna $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergenta eller också är båda divergenta.

Bevisidé. För stora k kommer a_k och b_k att vara approximativt proportionerliga mot varandra,

$$\frac{a_k}{b_k} \approx L \iff a_k \approx Lb_k.$$

Antag nu att $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ är konvergent. Först konstaterar vi att då är också $\sum_{k=N}^{\infty} b_k$ också konvergent för varje positivt heltal N, vi har ju bara kapat bort ett antal termer i början. Vi vill visa att konvergensen av $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ implicerar att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ också är konvergent, genom att utnyttja att $a_k \approx Lb_k$ för stora värden på k. För tillräckligt stora heltal N gället nu att

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=0}^{N-1} a_k + L \sum_{k=N}^{\infty} b_k.$$

Vi har skrivit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ som en summa av en ändlig summa $\sum_{k=0}^{N-1} a_k$, som förstås alltid är konvergent, och en "svans" $L\sum_{k=N}^{\infty} b_k$ som också är ändlig, den är talet L multiplicerat med en konvergent "svans" från $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Alltså är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. De andra fallen följer av likartade resonemang. (Om man vill omvandla detta till ett fullständigt bevis kan man jobba med olikheter istället, t ex gäller under givna förutsättningar att $a_k < 2Lb_k$ för alla tillräckligt stora värden på k. Detaljerna lämnas som övning åt den intresserade.)

Exempel 6. I slutet av förra avsnittet antydde vi att $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n^{3/2}+1}$ borde bete sig $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ och därmed vara divergent. Vi kan nu använda Sats 3 (Jämförelsetestet) för att visa detta.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{n^{3/2}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^{3/2}+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}-\sqrt{n}}{n^{3/2}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^{-1}}{1+n^{-3/2}} = 1.$$

Exempel 7. Undersök konvergensen hos serien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2 - \ln n}$.

Vi vet att för stora n är n^2 mycket större än $\ln n$ och serien borde därför konvergera precis som serien $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Vi har att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2-\ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2-\ln n}\cdot\frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1-\frac{\ln n}{n^2}} = 2.$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ är konvergent är också $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2-\ln n}$ konvergent.

Exempel 8. Undersök konvergensen hos serien $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{e^{\sqrt{n}}}$.

Vid första påseendet tycks denna serie påminna om en geometrisk serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{e^n}$, och det skulle därför kunna vara naturligt att pröva att jämföra med denna. Detta ger dock

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\sqrt{n}}}{e^n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n+\sqrt{n}} = 0.$$

Eftersom gränsvärdet $= 0$ ger inte jämförelsetestet något besked. Inte blir det bättre om vi kastar om täljare och nämnare, då blir gränsvärdet $+\infty$ och inte heller i det fall ger jämförelsetestet något besked. Faktum är att $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{e^{\sqrt{n}}}$ är konvergent, men detta måste visas på något annat sätt. Vi lämnar detta som en övning.

5. Några avslutande ord

Det kan vara bra att veta att det finns ett antal andra konvergenstester. För positiva serier finns också bl a *kvotkriteriet* och *rotkriteriet*. Vissa alternerande serier (serier där varannan term är positiv och varannan negativ) kan undersökas med *Leibniz kriterium*. Dessa kan man vid behov läsa om i de flesta läroböcker i grundläggande analys för högskolan (dock inte i Persson & Böiers).

Avslutningsvis konstaterar vi att för serier med såväl oändligt många positiva som negativa termer är bilden som regel mer komplicerad. Serien

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\dots$$

kan visas vara konvergent med hjälp av ovannämnda Leibniz kriterium, men genom att ordna om seriens termer (dvs summera samma termer men i en annan ordning) kan man få väsentligen vilket beteende som helst: divergens mot $+\infty$, divergens mot $-\infty$, divergens genom oscillation eller konvergens mot ett godtyckligt valt reellt tal!

6. Övningar

Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar.

Övning 1

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1/3}}$

Övning 2

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{1000k + 3^k}$

Övning 3

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

Övning 4

(a) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j^5}{j^7 - 1}$ (b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^5}{j^7 + 1}$ (c) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j^6}{j^7 - 1}$ (d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^6}{j^7 + 1}$

Övning 5

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Övning 6

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$

7. Svar och tips till övingarna

1. (a) Konvergent (b) Konvergent(c) Divergent . Använd Cauchys integralkriterium eller Exempel 22 på sidan 344 i Persson & Böiers.

2. (a) Konvergent , geometrisk serie. (b) Divergent, termerna går inte mot noll.

3. (a) Divergent (b) Konvergent, termerna domineras av termerna i en konvergent serie.

4. (a) Konvergent (b) Konvergent. (c) Divergent (d) Divergent. Pröva med att dominera med känd serie eller försök med jämförelsetestet.

5. (a) Konvergent (b) Konvergent, gör jämförelse med (a). (c) Konvergent, låt dig inspireras av Exempel 5

6. (a) Divergent (b) Konvergent. Studera först motsvarande generaliserade integral, lämpliga substitutioner behövs för att finna primitiver.