BLACK-SCHOLES EKVATION FÖR OPTIONER: PROJEKTUPPGIFT I SF1626 CINEK

En europeisk säljoption är ett kontrakt som ger möjligheten att sälja en aktie för ett fixt pris K vid en fix tid T i framtiden. Värdet f av optionen är en funktion av nuvarande aktiepris s och nuvarande tid t. Black-Scholes ekvation

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(s,t)}{\partial t} + rs\frac{\partial f(s,t)}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s^2} &= rf(s,t) \quad \text{för } t < T \text{ och } s \in \mathbf{R} \\ f(s,T) &= \max(K-s,0)\end{aligned} \tag{0.1}$$

beskriver hur optionsvärdet beror på räntan $r \in [0,\infty)$ och aktiens volatilitet $\sigma \in [0,\infty)$. Merton och Scholes fick 1997 Riksbankens "Nobelpris" för härledningen av denna ekvation från en precis matematisk beskrivning av en självfinansierad riskfri portfölj utan arbitrage; härledningen bygger på den "hedgning" som utfärdaren (banken) genomför för att hantera optionen. Kolla gärna vad självfinansierad riskfri portfölj utan arbitrage betyder.

a) Låt $r = 0$. Motivera, t.ex. med hjälp av Taylors formel, varför $\tilde f(n,m)$ definerad av

$$\begin{aligned}\frac{\tilde f(m,n) - \tilde f(m,n-1)}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 m^2 (\Delta s)^2}{2}\frac{\big(\tilde f(m+1,n) - 2\tilde f(m,n) + \tilde f(m-1,n)\big)}{(\Delta s)^2} &= 0 \\ \tilde f(m,N) &= \max(K - m\Delta s, 0)\end{aligned} \tag{0.2}$$

approximerar $f(m\Delta s, n\Delta t)$ för heltal m och n där $n \le N$ och $N\Delta t = T$ med (små) positiva reella tal Δt och Δs.

b) Skriv ett matlabprogram som löser Black-Scholes ekvation (0.1) med hjälp av differensmetoden (0.2). Du behöver ange begynnelsedata motsvarande

$$f(s,T) = \max(K-s,0).$$

Du behöver också reducera s till ett ändligt intervall

$$s_1 \le m\Delta s \le s_2$$

och bestämma approximativa värden för $f(s_1,t)$ och $f(s_2,t)$: motivera varför

$$f(0,T) = K$$
$$f(\alpha K, t) = 0$$

kan vara lämpligt för ett stort värde på α. Välj $T = 1$, $\sigma = 1$ och $K = 1.x_2x_3$ och bestäm $f(K,0)$, där $x_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$ och $K = 1.x_2x_3$ är decimalutvecklingen relaterad till födelsedagen för någon i gruppen så här: 31:a maj: $x_1x_2x_3x_4 = 0531$. Test hur Δs, Δt och α ska väljas för att felet ska bli mindre än 1 procent.

Arbeta gärna i grupper om två och lämna en gemensam lösning till kursledaren före den 11:e mars.

När r och σ är konstanta finns en formel för f. I det allmännare fallet när r och σ är givna funktioner av s och t finns ingen formel för f och numeriska metoder är enda valet. Det finns flera olika varianter av numeriska metoder. I det här projektet studerar du differensmetoder. Ett annat alternativ är Monte Carlo metoder.