KTH Matematik

SF 1626 Flervariabelanalys för CMAST1
Hemuppgifter mars 2010

De fyra individuella parametrarna a, b, c, d är de fyra sista nollskilda siffrorna i Ditt personnummer tagna bakifrån.
Exempel: $19380718 - 0302$ ger $a = 2,\ b = 3,\ c = 8,\ d = 1$.
Skriv namn, personnummer och parametervärdena överst på första bladet.
Skriv tydligt. Förklara allt Du gör i ord.
Alla papper Du lämnar in skall vara ihophäftade i ett hörn med **häftklammer** (ej gem). Vänsterkanten skall vara spikrak och ej "sicksacka" som efter en urrivning.
Inlämnas torsdag 11 mars 2010 i samband med övning eller föreläsning eller i matematiska institutionens svarta brevlåda utanför studentexpeditionen.

1. Givet en kurva

$$10\,x^2 \;+\; (2d\,)\,xy \;+\; 10\,y^2 \;=\; 9$$

och en linje $ax \;+\; by \;=\; 40 \;+\; c$. Bestäm minsta avståndet dem emellan.

2. Ett vulkanberg ges av ekvationen

$$z \;=\; 100 \;-\; \{\,(a+b)\,x^2 \;+\; (a+c)\,xy \;+\; (c+d\,)\,y^2 \;-\; 30\}^2\,.$$

När det regnar fylls mittdelen av berget nära origo av vatten tills en sjö bildas.
Till vilken höjd når sjön innan vattnet rinner över kanten?
Vad blir då sjöns area, dvs vattenspegelns area?
Vilken volym får sjön, dvs hur mycket vatten ryms i vulkankäglan?

3. Vi skall bygga en rektangulär, rätvinklig låda av fyra olika sorters material, som kostar olika mycket per ytenhet. Priserna a, b, c, d nedan räknas t ex i kronor per kvadratdecimeter.
Materialet till fram- och baksidan kostar a ,
materialet till höger och vänster sida kostar b ,
materialet till botten kostar c , medan
materialet till locket kostar d ,
Bestäm lådans proportioner (dvs förhållandena längd : bredd : höjd mellan den optimala lådans längd, bredd och höjd) om den skall maximera volymen under bivillkoret att totalkostnaden är given. (Detta är i stort sett samma sak som att minimera lådmaterialets totalkostnad under/med given volym).

4. Låt
$$P(x,y) = a\,\mathrm{e}^{-x} + c\,(\,b\,y^2 - 3\,d\,)\,y\ ,$$
$$Q(x,y) = c\,y^2\,\ln(\,1 + y^4\,) + c\,(\,3\,a - b\,x^2\,)\,x\ ,$$
och betrakta kurvintegralen $I = I_\gamma = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, där γ är en kurva i planet. Finn den enkla, slutna kurva γ i planet som maximerar talet I_γ . Vad blir integralens maximala värde $I_{\max}$?

Ledtråden heter Green.

5. Mellan två parallella plan i rummet ryms en oändligt stor skiva med konstant tjocklek. En sned parallellepiped E i rummet bestäms av att alla dess punkter samtidigt ligger mellan planen A_1 och A_2 , mellan planen B_1 och B_2 , samt mellan planen C_1 och C_2 . Skriv upp dess volym $\mathrm{vol}\,(E)$ som en multipelintegral. Beräkna volymen. De sex planen är

$$\begin{array}{lcl}
A_1 & : & ax + by + 5z = -2\ , \\
A_2 & : & ax + by + 5z = 2\ , \\
B_1 & : & 4x + cy - 3z = -1\ , \\
B_2 & : & 4x + cy - 3z = 1\ , \\
C_1 & : & x + y - zd = -3\ , \\
C_2 & : & x + y - zd = 3\ .
\end{array}$$

PS. Om Du har otur med Dina parametrar så kan volymen råka bli oändlig. Då måste Du förklara varför - vilket “fel” är det då på de sex planen?

6. Vi skall genomföra variabelbytet

$$\begin{array}{l}
u = b\,(\,y^2 - x^2\,) - c\,y\ , \\
v = c\,x - 2\,b\,xy\ .
\end{array}$$

Vi skriver $z = f(x,y) = g(u,v)$. Uttrycket $U = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \triangle f$ skall transformeras till ett uttryck i funktionen g och dess partiella derivator, som sedan skall förenklas så mycket som möjligt: Svaret skall rymmas på en enda rad.