PDE

1.4, 4.1

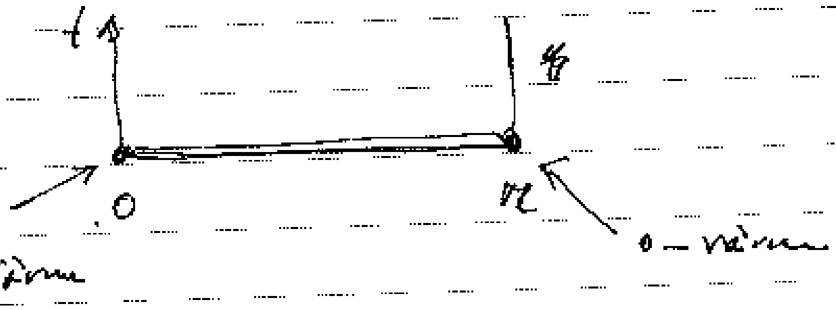
1.4 Fouriers metod.

Värmeledningsekv. som beskriver hur värmen sprider sig ~~gg~~ genom tiden t är

$$u_{xx} = u_t$$

där $u = u(x,t)$ är temperaturen vid tiden t i pkten x.

Detta är en model för 1-dim. fallet exvis ett metalrör (som är isolerad så att värmen sprider sig bara i röret och ej i omgivn.)



$$(*) \quad \begin{cases} \text{(E)} \ u_{xx} = u_t & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ \text{(B)} \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ \text{(I)} \ u(x,0) = f(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Ekv. är homogen och om u, v är lösningar till (E) så är även $\alpha u + \beta v$ en lösn.

Fouriers idea var det att lösa ekv. (E) och (B) och strunta i (I) för ögonblicket.

Vi ser att $u \equiv 0$ är en lösning, men det hjälper inte om vi ska sen ha (I).

Fourier började med att titta på lösningar av typ

$$u = X(x)T(t)$$

då är en sådan lösn skulle vara möjlig om

$$X''T = XT' \quad \text{eller} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}$$

$$0 < x < \pi \; ; \quad t > 0$$

alltså vänst.-led och högerled måste vara konstanter $= \lambda$:

$$\Rightarrow \quad X'' + \lambda X = 0 \quad 0 < x < \pi$$

$$T' + \lambda T = 0 \quad t > 0$$

randdata (B) ger att

$u(0,t) = X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t>0$

dvs $X(0) = X(\pi) = 0$

inget villkor för T.

så vi har

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

lösningar ges av:

Fall 1 $\quad \lambda < 0 \qquad \lambda = -\alpha^2 \qquad \alpha > 0$

$$X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

randdata ger $A = B = 0$

Fall 2 $\quad \lambda = 0 \qquad X'' = 0 \Rightarrow X = Ax + B$

randdata ger $A = B = 0$

Fall 3 $\quad \lambda > 0 \qquad \lambda = \omega^2 \qquad \omega > 0$

$$X = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

randdata ger $X(0)=0=A$

$X(x)=B\sin\omega x$; $X(\pi)=0$ ~~ger B=0~~

ger $B\sin\omega\pi=0 \Rightarrow B=0$ eller $\sin\omega\pi=0$

$B=0$ inte intressant

så $\sin\omega\pi=0$ är intressant

$\Rightarrow \boxed{\omega=n} \Rightarrow$

$$X(x)=X_n(x)=B_n\sin nx$$

och $\lambda=n^2$; $B_n=$ fri konst.

För dessa värden av λ löser vi

$$T'+\lambda T=0 \Rightarrow T'=-n^2T$$

$$\Rightarrow T_n(t)=C_n e^{-n^2t}$$

Så lösningen av

$$\boxed{u_n(x,t)=b_n e^{-n^2t}\sin nx} \quad n=1,2,3\ldots$$

och $u(x,t)=\sum_{n=1}^{N} b_n e^{-n^2t}\sin nx \quad N>0$

$\Rightarrow$

Vi måste nu bestämma b_n och N s.a.

$$(+) \quad f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx \qquad 0 < x < \pi$$

problem kan vi för given/godtycklig f

bestämma b_n s.a. (+) håller?

om $N \to \infty$ vad gör vi med konv. begreppet

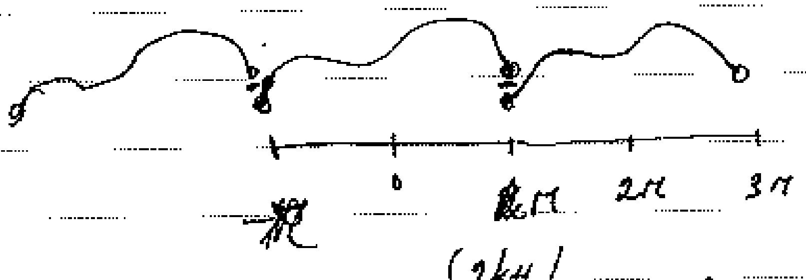
4.1 Fourier Serier.

Vi vill lösa problemet (+) som dök upp i avsnitt 1.4.:

Given en fkn $f(x)$; kan vi återskapa fkn:en genom en serie (sin / cos)

Låt oss betrakta 2π periodiska funktioner

(även andra perioder kan betraktas)



etc..

obs $f((2k+1)\pi) = f(\pi) \quad \forall\ k \neq 0$

och $f(t + (2k+1)\pi) = f(t)$

Låt oss börja omvänt, dvs. om f ~~kan~~ skulle vara en serie:

(1) $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} \qquad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\right)$$

där c_n är komplexa ~~tal~~ och $\sum |c_n| < \infty$.

(Weierstrass Majorant test ger att serien ~~kon~~ absolut konvergerar, och konv. är likf. då $|e^{int}| = 1$)

genom multiplikation med e^{-imt} och integration får vi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imt} = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{i(n-m)t} dt$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt}_{= \begin{cases} 2\pi & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}} = 2\pi c_m$$

Alltså om en serie ~~a~~ som i (1) är absolut konv. så kan vi bestämma koeff. i termer av hela serien $f = \sum$ –

Fourier koeff

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

är kallas Fourier-koeff för en 2π-periodisk och ~~absolut konst~~ en absolut Riemann-integrerbar funktion f, över en period.

serien $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ kallas F-serien

Alternativa skrivformer:

$$e^{int} = \cos nt + i\sin nt$$

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = c_n(\cos nt + i\sin nt) + c_{-n}(\cos nt - i\sin nt)$$

$$= \underbrace{(c_n + c_{-n})}_{a_n} \cos nt + i\underbrace{(c_n - c_{-n})}_{b_n} \sin nt = a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$n = 1, 2, \ldots$

För $n=0$ har vi en enda term ~~c_0~~ $\left(\begin{matrix}\sin 0t = 0\\ \cos 0t = 1\end{matrix}\right)$

$$c_0 + c_0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 2c_0 \Rightarrow c_0 = a_0/2$$

vi får

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \underbrace{c_0}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

koef. $a_n = C_n + C_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \qquad n=1,2,\ldots$$

p.s.s.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\sin nt\,dt \qquad n=1,2,\ldots$$

detta kallas
Fourier sin / Cosin serien (Trigonometriska serien)

Läs sidan 76 om "phase angle" och amplituder

$$A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \text{amplitud}$$

Lemma: 4.1 Låt $f = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{int}$ då gäller detta

1) $|C_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_T |f|dt \quad \forall n$ (självklart)

2) $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ (Riemann Leb. sats 2.5)

Remark/Anm.

Obs. $C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$

Ex. Bestäm Fourier ~~koeff~~ serien för f då

$f = e^{-|t|}$ $|t| < \pi$ och f är 2π-periodisk.

Lös – f är en jämn fkn så sin serien borde inte finnas!?

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{-|t|}\sin nt}_{\text{udda fkn}} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|t|}\cos nt \underset{\text{jämn fkn}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\cos nt =$$

$$= \underset{\text{använd Beta}}{\frac{2}{\pi}} \dots = +\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\right)$$

använd Beta

eller partiellint. eller

$e^{t}\cos nt = Re\, e^{(in-1)t}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\,dt = \frac{2}{\pi}(1-e^{-\pi})$$

$$f \sim \frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nt$$

Lektion 2

2.5, 4.2, 2.4

2.5: Riemann-Leb. lemma.

Låt f vara absolut integr. ($\int_I |f| < \infty$) över I intervall

Då gäller det att

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(u) \sin \lambda u \, du = 0$$

Bevis: steg 1 $f = $ konst. ok. (partiell integration)

steg 2 $f(u) = \sum_{k=1}^{N} c_k g_k(u)$ där $g_k = \begin{cases} 1 & \text{på } I_k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

karakt. funktion

g_k även sant i detta fall då

I_k

$$\int_I f \sin \lambda u = \sum c_k \int_{I_k} g_k(u) \sin \lambda u$$

och som i fallet 1

steg 3 Enligt def av Riem. integrabilitet för $\varepsilon > 0$

$$\exists \; g = g_\varepsilon \quad \int_a^b |f(u) - g(u)| \, du < \varepsilon/2$$

styckvis konst.

$\sum_1^N c_k g_k$

$\Longrightarrow$

nu gäller det att

$$\left|\int_a^b f(u)\sin\lambda u\,du\right| \leq \Big|\underbrace{\int (f-g)\sin\lambda u}_{<\varepsilon/2}\Big| + \Big|\underbrace{\int g\sin\lambda u}_{\substack{\to 0 \\ \lambda\to\infty}}\Big|$$

så för λ stort $< \varepsilon$

och ε är godtyckl. $\Rightarrow$ $\lim_{\lambda\to\infty}\int f(u)\sin\lambda u=0$

Om vi nu låter I vara obegr. så kan vi

$$\int_I |f| = \int_{J} |f| + \int_{I\setminus J} |f|$$

där J är stor del av I s.a. $\int_J |f| \sim \int_I |f|$

dvs $\int_{I\setminus J} |f| < \varepsilon/2$

och vi kan nu göra p.s.s.

4.2 Dirichlet kärna / entydighetsats

Några satser som hjälper oss att förstå F-serien samt huruvida de är entydiga mm.

<u>Lemma</u> Låt $D_N(u) := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos nu\right)$

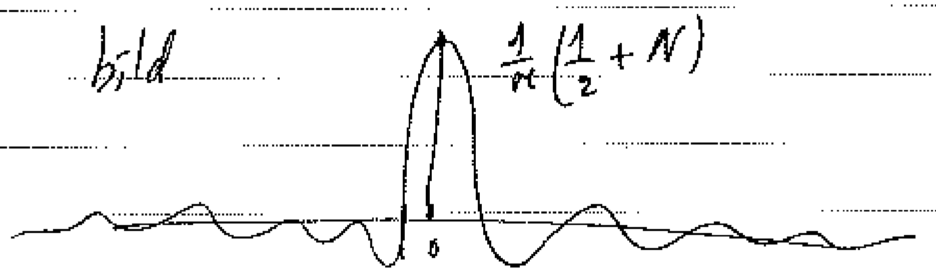
då gäller det att

$$D_N(u) = \frac{\sin (N+\frac{1}{2})u}{2\pi \sin \frac{1}{2} u}$$

[bevis: se kalkyl i boken sidan 81]
använd $\cos nu = e^{inu} + e^{-inu}$ och geometriska serie summ

$D_N(t)$ Dirichlets kärna

bild



så $D_N(0) \longrightarrow \infty$

För Fouriers serien (upp till grad N) får vi

$S_N(t)$ = partial summan:

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{int}$$

$$\ldots = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)\,\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}\,du$$

Aritmetiska medelvärde av D_N:

Lemma 4.3

$$F_N(u) := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(u) = \frac{1}{2\pi(N+1)}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(N+1)u}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2$$

beviset är genom beräkning (se övningar)

Medelv. för partialsummor:

$$\sigma_N(u) := \frac{1}{(N+1)}\sum_{n=0}^{N} \cancel{D_n}\, S_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_N}{N+1} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)\,F_N(u)\,du$$

Lemma 4.4 Egenskaper hos Fejér kärnan $F_N(u)$

1) $F_N(u) = F_N(-u)$; $F_N \geq 0$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} F_N = 1$

3) $\delta > 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} F_N(u)\,du = 0$

(se boken)

F_N kallas en Positiv-summation kärna

och då kan vi visa:

Thm 4.1 (Fejérs Sats)

Låt ~~f~~ f vara styckvis kont. på $(-\pi,\pi)$ och

periodisk (eller def. på $\mathbb{T}$). ~~samt kont.~~

Om f är kont i en pkt t_0 så gäller

det att $\lim_{N\to\infty} \sigma_N(t_0) = f(t_0)$

(läs avsnitt 2.3 summation av serier)
(Cesaro summable)

Slutsats av detta är följande

Om för ngn kont. fkn f över I vi har att dess

F-serie är absolut konv (dvs $\sum |c_n|$ är konv)

då gäller det att

$$S_N(t) \to f(t)$$

konv är likf (~~[illegible]~~ Weierstrass M-test)

Bevis Eftersom F-serien är abs. konv

så fxs gäller det att

$$S_N(t) \to s \quad \text{ngn fkn } s$$

Enligt Cesàro summation lemma

$$S_N \to s \quad \sigma_N(t) \to s$$

men enligt Fejérs sats (Th 4.1)

$$\sigma_N(t) \to f(t)$$

dvs $s = f(t)$ och $S_N(t) \to f(t)$

Ex. Efter beräkning kan man visa att F-serien för $f(t)=t^2$

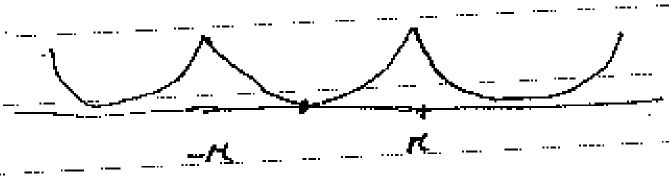
$$\frac{\pi^2}{3}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

över $(-\pi,\pi)$

Satsen ger nu att

$$t^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

(Formeln håller även för $t=\pm\pi$; varför?
Jo: därefter periodisk utvidgning
gäller det att $f(t)=t^2$ är
kont. över $\mathbb{R}$; eller T)



Vi ser att om $t=0 \Rightarrow$

$$-\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$t=\pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Entydighetssats (4.3)

① f: styckvis kont och $C_n(f)=0 \quad \forall n$

$\Rightarrow f(t)=0$ i alla punkter t där f är kont.

② ~~$f=g$ (kont funktioner) $\Rightarrow$~~

~~f och~~ $C_n(f)=C_n(g) \Rightarrow f\equiv g$

f, g kont.

2.4 Något om positiva summationskärnor.

1) $K_n(s) \geq 0$

2) $\int_{-a}^{a} K_n(s)\,ds = 1$

3) $\delta>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|s|<a} K_n(s)\,ds = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} K_n(s)f(s)\,ds = f(0)$; om f kont och integrebar över $(-a,a)$

Läs beviset.

Ex. ① $K_n(s) = \begin{cases} n & |s| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

② $\dfrac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ ~~de~~ Täthets fkn för normal distrib.

Öv. 2.21. Låt $\begin{cases} \varphi = \frac{15}{16}(x^2-1)^2 & |x|<1 \\ \varphi = 0 & \text{annars} \end{cases}$

Låt f vara kont. deriverbar.

Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} n^2 \varphi'(nx) f(x)\,dx$$

Lös. $\cancel{\int_{-1}^{1} n^2\varphi'(nx) f(x)\,dx = \text{partiell integr}}$

$\cancel{= \Big[n\varphi(nx) f(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n\varphi(nx) f'(x)\,dx}$

$\cancel{= \Big(n\varphi-}$

$\Longrightarrow$

så att $\psi(x) = \varphi(nx) = \begin{cases} \frac{15}{16}[(nx)^2-1]^2 & |nx|<1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{15}{16}[(nx)^2-1]^2 & |x|<1/n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} n^2\varphi'(nx) f(x) = \int_{-1/n}^{1/n} n\psi_n'(x) f(x)dx = \text{partiell integr.}$$

$$\psi_n' = n\varphi'(nx)$$

$$= \underbrace{\Big[n\psi_n(x) f(x)\Big]_{-1/n}^{1/n}}_{=0} - \int_{-1/n}^{1/n} n\psi_n(x) f'(x)\,dx$$

nu gäller det att $n\psi_n(x)$ är en summation

kärna (visa det!: enkel beräkning)

Sats 2.1 ger att den sista integralen

$$\to -f'(0)$$

svar $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} n^2\varphi'(nx) f(x) = -f'(0)$

Lektion 3

4.3 - 4.4

Deriverbara fkner

För deriverbara fkner kan man visa intressanta egenskaper hos $c_n(f)$

Låt oss beräkna $c_n(f')$ då f är $C^1(T)$

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int} = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-in)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[f(\pi)(-1)^n - f(-\pi)(-1)^n\right]}_{=0 \text{ f period}}$$

$$+\,in c_n(f) = in c_n(f)$$

Om f har F-serien $\sum c_n e^{int}$ så har

f' serien $\sum c_n(in) e^{int}$

p.s.s. för $f \in C^2(T)$ har vi $c_n(f'') = (-n)^2 c_n(f)$

Sats 4.4 Om $f \in C^k(T)$ då är $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$

och $|c_n(f)| \leq M/|n|^k$ för någon konst M.

Bevis genom iteration får vi

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Om $f \in C^k(T) \Rightarrow |f^{(k)}|$ är begränsad och

$$|c_n(f^{(k)})| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_T f^{(k)}(t)e^{-int}\right| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_T |f^{(k)}| \leq M$$

dvs.

$$|c_n(f)\cdot(in)^k| = |c_n(f^{(k)})| \leq M$$

$$\Rightarrow \quad |c_n(f)| \leq \frac{M}{n^k}$$

En tillämpning:

Ex. Bestäm $y(t)$ över T (dvs 2π periodisk) s.a.

$$y'(t) + 2y(t-\pi) = \sin t \quad -\infty < t < \infty \text{ (eller över } T\text{.)}$$

Lös Om $y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ då är $y' = \sum in c_n e^{int}$

och ekv. blir

$$y' + 2y(t-\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(in c_n e^{itn} + 2c_n e^{i(t-\pi)n}\right) = \sum (in + 2e^{-i\pi n}) \cdot c_n e^{int}$$

$$\sim\!\!\!\!\!\!\!\!\!\text{dus} \quad \cancel{in + 2e^{-in\pi}} = \sin$$

mes $in + 2e^{-in\pi} = in + 2(-1)^n$

och $\sin t = \cancel{} \cdot \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \dfrac{1}{2} i e^{-it} - \dfrac{1}{2} i e^{it}$

alltså

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (in + 2(-1)^n) c_n e^{int} = \frac{1}{2} i e^{-it} - \frac{1}{2} i e^{it}$$

$\Rightarrow \quad n = -1 \quad \Rightarrow \quad (-i - 2) c_{-1} = \frac{1}{2} i \Rightarrow c_{-1} = \frac{1}{10}(-2i - 1)$

$n = 1 \quad \Rightarrow \quad (i - 2) c_1 = -\frac{1}{2} i \Rightarrow c_1 = \frac{1}{10}(2i - 1)$

övriga n ger $c_n = 0$

Svar: $y(t) = c_1 e^{it} + c_{-1} e^{-it} =$

$$= \dots = \frac{1}{5}(-\cos t - 2\sin t)$$

4.4 punktvis konv.

Vi vet att kont. fkner behöver inte ha F-serier som konv., ~~men att~~ och det behövdes lite mer ($\sum |c_n| < \infty$).

Nu ska vi titta på fallet där f har diskontinuit.

Def/Notation/Beteckn.

$$f(t_0^-) = \lim_{t \nearrow t_0} f(t) = \text{Vänster gr. värde}$$

$$f(t_0^+) = \lim_{t \searrow t_0} f(t) = \text{Höger} \ldots$$

$$f_L'(t_0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0^-)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0-h) - f(t_0^-)}{-h}$$

$$f_R'(t_0) = \lim_{h \searrow 0+} \frac{f(t_0+h) - f(t_0^+)}{h}$$

Vi ska nu beräkna $S_N(t)$ ~~etter fks~~.

Vi vet att

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u} du$$

enligt avsnitt 4-2, där $S_N(t)$ = N-partial summan $= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

~~Vi vet också att~~

Lemma 4-5 Om f_L, f_R, f'_L, f'_R exist. i t_0 då gäller:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t_0 - \quad \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin \frac{1}{2} u} \, du = f(t_0^-)$$

Bevis: Eftersom $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} \, du = 1$

(använd: att integranden är $= 2\pi D_N(u) = 1 + 2\sum_1^N \cos nu$)
(Lemma 4.2)

då är

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t_0 - u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} \, du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t_0 - u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} \, du$$

$$\underbrace{- f(t_0^-) \underbrace{\frac{1}{\pi} \int \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} \, du}_{=1} + f(t_0^-)}_{=0} = \quad \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Big[\underbrace{\big(f(t_0-u) - f(t_0^-)\big)}_{\approx f_L'(t_0)(-u)} \cdot \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} \, du \Big] + f(t_0^-)$$

$$\approx \frac{1}{\pi} f_L'(t_0) \int_0^{\pi} \underbrace{\left(\frac{-u}{\sin\frac{u}{2}} \right)}_{\text{integrerbar}} \sin(N+\tfrac{1}{2})u \, du + f(t_0^-)$$

så Riemann-Leb. lemmat ger att integralen

$\to 0$ och kvar blir $f(t_0^-)$

och vi har bevisat lemmat.

p.s.s. $f(t_0^+) \ldots$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(t_0-u) \frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u} \, du = f(t_0^+)$$

Sats 4.5 om f har 2π-period och $f_{L,H}(t_0^{\pm})$ och

$f'_{L,H}(t_0)$ existerar då konv. F-serien för

f i $t = t_0$ mot $\frac{1}{2}\left[f(t_0^+) + f(t_0^-)\right]$.

Ex. 4.5 undersök om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$

konvergerar

Lös. Enligt ~~[illegible]~~ ex. 4.2 funktionen

$f(t) = (\pi - t)/2 \quad 0 < t < \pi$

och $-f(t) = f(-t) \quad -\pi < t < 0$

har F-serie $= \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$

men $f_{L,H}(0)$, $f'_{L,H}(0)$ exist. (Visa)

och då säger satsen 4.5 att

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{f_L(t) + f_R(t)}{2}$$

~~[illegible]~~

i $\mathcal{D}t$

Övn. 4.21 $f = \cos\frac{3}{2}x \quad -\pi < x < \pi$; och 2π-periodisk

bestäm F-serie och undersök konv. vad är seriens

summa i $x = \frac{n\pi}{2}$; $n = 1, 2, \cdots$

Lös. $b_n = 0$ då f jämn

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\frac{3}{2}x \cos nx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\frac{3}{2}+n)x + \cos(\frac{3}{2}-n)x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[+ \frac{\sin(\frac{3}{2}+n)x}{(\frac{3}{2}+n)} + \frac{\sin(\frac{3}{2}-n)x}{(\frac{3}{2}-n)} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n+1} \left[\frac{12}{9-4n^2} \right] \right]$$

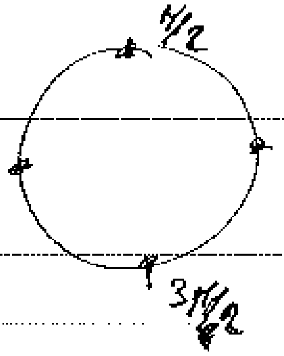
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{12}{9-4n^2}$$

$$12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{9-4n^2} \cos(nx) = f(x) \quad \text{over } (-\pi, \pi)$$

då f kont. deriv. i $(-\pi, \pi)$

Serien konv. då koeff. $|\dots| \leq \frac{1}{9-4n^2} \sim \frac{1}{n^2}$

For $x = \frac{n\pi}{2}$: svarer mot $\pi/2$, $3\pi/2$



$$12 \sum \frac{(-1)^{n+1}}{9-4n^2} (-1) \cos n\frac{\pi}{2} \Big\} \Longrightarrow$$

eller $\cos(n\frac{3\pi}{2})$