6.4 Sturm Liouville

V inre produktrum $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Operator = en avbildning (linjär)

$$A : D_A \to V$$

$D_A \subseteq V$ delrum av V

symmetry: $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \quad \forall u, v \in D_A$

ex. $V = L^2(\mathbb{T})$; $D_A = V \cap C^2(\mathbb{T})$

$A = -D^2$ andra derivatan

$$Au = -u''$$

$\langle Au, v \rangle = \cdots = \langle u, Av \rangle$ [visat, använd periodicitet]

<u>Def.</u> egenvärde / egenvektor λ, u

$Au = \lambda u$; $u \neq 0$

Lemma 6.1 symmetry $\Rightarrow$ reella egenvärd.

-"- $\Rightarrow u_{\lambda_1} \perp u_{\lambda_2} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

bevis $\lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Au, u \rangle =$

$= \langle u, Au \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$

$\Rightarrow \lambda \|u\|^2 = \bar{\lambda} \|u\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda = \text{reell}$

$\perp$: $\lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \ldots = \langle u, Av \rangle$

$= \bar{\mu} \langle u, v \rangle \underset{\uparrow}{=} \mu \langle u, v \rangle$

$\mu = \text{reell}$

$\Rightarrow (\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = 0 \,, \ \lambda \neq \mu$

$\Rightarrow \langle u, v \rangle = 0 \ ; \ u \perp v$

Vi ska använda detta samt derivator som linjära operatorer och bestämma egenvärden/egenfunktioner.

$$a<x<b\ ,\ p\in C^1(I)$$

$$(E)\quad \boxed{(pu')' + qu + \lambda w u = 0}$$

$$p(a)\neq 0\neq p(b)$$

randdata

$$(B)\quad \begin{cases} A_0 u(a) + A_1 u'(a) = 0 \\ B_0 u(b) + B_1 u'(b) = 0 \end{cases}$$

A_0, A_1, B_0, B_1 reella konst.

$$(A_0, A_1)\neq(0,0)\ ;\ (B_0, B_1)\neq(0,0)$$

Reguljära Sturm-Liouville problemet

Funktionen w ovan i (E) tillkommer i inre produkten som vikt fkn

$$\langle u, v\rangle = \int_I u\bar{v}\, w\, dx$$

A definieras genom

$$Au = -\frac{1}{w}\left((pu')' + qu\right)$$

$$D_A = \left\{ u \in C^2(I) : \begin{array}{l} Au \in L^2(I,w) \\ u \text{ satisfierar (13)} \end{array} \right\}$$

Nu kan ekv. E skrivas som

$$\boxed{Au = \lambda u}$$

symmetry:

$$\langle Au, v\rangle = -\int_a^b \frac{1}{w}\left((pu')' + qu\right)\bar{v}\, w\, dx =$$

$$= -\int_a^b (pu')'\bar{v} - \int qu\bar{v} = -\left[pu'\bar{v}\right]_a^b +$$

$$+ \int pu'\bar{v}' - qu\bar{v}$$

$$\langle u, Av\rangle = \int u \, \overline{\left(-\frac{1}{w}\left((pv')' + qv\right)\right)}\, w\, dx =$$

$$\left\{\begin{matrix} p,q,w \\ \text{reella} \end{matrix}\right\} = -\int_a^b u\,(p\bar{v}')' - \int_a^b u q \bar{v} =$$

$$= -\Big[u p \bar{v}\Big]_a^b + \int_a^b (u' p \bar{v}' - u q \bar{v})\,dx$$

Dvs.

$$\langle Au, v\rangle - \langle u, Av\rangle = \Big[p u \bar{v}' - p u' \bar{v}\Big]_a^b =$$

$$= \left[p(x) \begin{vmatrix} u & u' \\ \bar{v} & \bar{v}' \end{vmatrix} \right]_a^b$$

determinant

Vi ser att determinanten i $x=a$ ska bli $=0$?! Använd $\begin{cases} A_0 u(a) + A_1 u'(a) = 0 \\ A_0 \bar{v}(a) + A_1 \bar{v}'(a) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}(a) \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ och vi har

$(A_0, A_1) \neq (0,0)$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ \bar{v}(a) & \bar{v}'(a) \end{bmatrix} = 0$$

$\left[\, M(\bar{X}) = \bar{0} \,;\ \text{om } |M| \neq 0 \Rightarrow M^{-1} \text{ exist} \Rightarrow \bar{X} = \underbrace{M^{-1}(\bar{0})}_{=0} \,\right]$

Def. $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ symmetry

Sats 6.1 (S.L. sats)

Operatorn A för problemet (E) + (B)
har oändlig många egenvärden

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \longrightarrow \infty \quad n \to \infty$$

egetrummet för varje egenvärde
har dim. 1. $\{\varphi_n\}_1^\infty$ är komplett syst.

(φ_n = egenvektor för λ_n)

---

ex. $u'' + \lambda u = 0 \qquad 0 < x < \pi$

$u(0) = u(\pi) = 0$

$\varphi_n = \sin nx$; $L^2(0, \pi)$

---

ex. $u'' + \lambda u = 0 \qquad 0 < x < \pi$

$u'(0) = u'(\pi) = 0$

$\varphi_0 = 1/2 \qquad \varphi_n = \cos nx \quad n = 1, 2 \ldots \quad , \quad L^2(0, \pi)$

Andra former av randdata.

$$u'' + \lambda u = 0 \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$u(-\pi) = u(\pi)$$
periodisk
$$u'(-\pi) = u'(\pi)$$

egetrummen tillhörande λ_n har dim 2!

$\lambda = 0$ ger $u = \text{const}$

$\lambda > 0$ ger $\lambda = n^2 \Rightarrow A_n \cos nx + B \sin nx$

$\lambda < 0$ ingen lösn

Övn. 6.16

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \quad 0 < x < \pi \\ u(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Bestäm ett komplett ortog. system

Lös $\lambda = 0 \rightarrow u = Ax + B \rightarrow A = B = 0$

$\lambda < 0 \rightarrow u'' - \omega^2 u = 0 \rightarrow u = Ae^{-\omega x} + Be^{\omega x}$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -Ae^{-\omega\pi} + Be^{\omega\pi} = 0 \end{cases} \rightarrow A = B = 0$

$\lambda > 0 \rightarrow u'' + \omega^2 u = 0 \rightarrow u = A \sin \omega x + B \cos \omega x$

$\rightarrow$

$u(0)=0 \rightarrow B=0$

$u'(\pi)=0 \rightarrow \cos\omega\pi=0 \Rightarrow \omega=\frac{n}{2}$ n udda

$\omega=\frac{2n+1}{2} \quad n=0,1,2,..$

Svar: $\lambda_n=\frac{2n+1}{2} \quad n=0,1,2,..$

$\varphi_n=\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)x$

6.18

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\,\frac{du}{dx}\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}\,u=0$$

$$-1<x<1$$

visa att ekv. ovan har egenvärden

$\lambda_n=n^2$ $(n=0,1,2,\dots)$ och egenfunktion

$T_n=\cos(n\arccos x)$.

lös.

visa att $AT_n=n^2T_n$, där $Au=-\left(\sqrt{1-x^2}\,u'\right)'$

vi sätter $T_n=\mathrm{Re}\,e^{in\theta}$, $\theta=\arccos x$

$$-AT_n=\left(\sqrt{1-x^2}\cdot n\theta'\,\mathrm{Re}(ie^{in\theta})\right)'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,n\theta'\,\mathrm{Re}(ie^{in\theta})+$$

$$+\sqrt{1-x^2}\cdot n\theta''\,\mathrm{Re}(ie^{in\theta})+\sqrt{1-x^2}\,(n\theta')^2\,\mathrm{Re}(-e^{in\theta}) \rightarrow$$

$$\theta' = (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\theta'' = -\frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$\Rightarrow$

$$-AT_n = \left[\left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot n \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \left(\sqrt{1-x^2}\right) n \cdot \left(\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \operatorname{Re}(i e^{in\theta}) + \left[\sqrt{1-x^2} \cdot n^2 \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\right] \operatorname{Re}(-e^{in\theta})$$

$$= 0 + \frac{n^2 \cdot \operatorname{Re}(-e^{in\theta})}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-n^2 T_n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{AT_n = \frac{n^2 T_n}{\sqrt{1-x^2}}} \quad \text{v.s.v.}$$

6.5 viktig: läs själva om olika former av ekv och egenvärden. Legendre, laguerre, Hermite, ..