7. Fourier Transform

Lekt. 11

7.1 f: $2p$-periodisk, styckvis kont. Vi har då

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{p}t}$$

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t) e^{-in\frac{\pi}{p}t}\,dt$$

Vad händer då $p \to \infty$?

sätt $\omega_n = \frac{n\pi}{p}$ och $\hat{f}(p,\omega) = \int_{-p}^{p} f(t) e^{-i\omega t}\,dt$ $\omega \in \mathbb{R}$

dvs. $c_n = \frac{1}{2p}\hat{f}(p, \frac{n\pi}{p})$

vi får

$$f(t) \sim \frac{1}{2p}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(p,\omega_n) e^{+i\omega_n t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(p,\omega_n) e^{i\omega_n t} \cdot \frac{\pi}{p}$$

~~Så~~ nu gäller det att

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{p} - \frac{n\pi}{p} = \frac{\pi}{p}$$

så

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(p,\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n$$

Riemann summa i $\underline{\omega_n}$; med intervall indelning $\frac{\pi}{p}$

då $p \to \infty$

$$\Rightarrow f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

där $\hat{f}(\omega) = \lim_{p\to\infty} \hat{f}(p,\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

$\hat{f}$ kallas F-transformen av f.

Def. om $\int_{\mathbb{R}} |f| \, dt$ är ändligt så definieras

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

ex. $f = e^{-|t|}$ ⇒ $f \in L^1$ och

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} e^{-i\omega t} \, dt = \int_0^\infty e^{-(1+i\omega)t} + \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t}$$

$$= \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

~~ex. Heaviside~~

$$\cancel{f(t) = H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}}$$

$$\cancel{\hat{f}(\omega) = \hat{H}(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \, dt =}$$

Sats $f \in L^1$ då gäller det att:

(a) $\hat{f}$ är begränsad ; $|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| dt$

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1}$$

(b) $\hat{f}$ är kont. på $\hat{\mathbb{R}}$

(c) $\lim_{\omega \to \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$

bevis: (a) $|\hat{f}(\omega)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} f e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int \underbrace{|f \cdots|}_{|f|}$

(b) om. 7.3:

steg 1: $|\hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t} \right] d \right.$

$= \int \left| e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t} \right| = \cancel{2i e^{-i\frac{ht}{2}} \cdot \left[e^{-i(\omega+\frac{h}{2})t} - e^{-i(\omega-\frac{h}{2})t} \right]}$

$= \left| e^{-i(\omega+\frac{h}{2})t} \cdot 2i \left[\frac{e^{+i\frac{h}{2}t} - e^{-i\frac{h}{2}t}}{2i} \right] \right| = \left| 2i e^{-i(\omega+\frac{h}{2})t} \sin\left(\frac{h}{2}t\right) \right|$

$\leq \left| \sin \frac{h}{2} t \right| \Big\} \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \left| \sin\left(\frac{h}{2} t\right) \right| dt$

(5

För $\varepsilon > 0 \quad \exists \quad R_\varepsilon : \quad \int_R |f| \sin \leq \int_{R_\varepsilon} |f| + \varepsilon$

$$\int_R |f| |\sin(\tfrac{ht}{2})| \leq \int_{R_\varepsilon} |f| |\sin \tfrac{h}{2} t| \, dt + \varepsilon$$

Eftersom $|f| \in L^1$ ~~så~~ $\Rightarrow$ $f \to 0$ i $\underline{\infty}$ eller

att integralen i $\underline{\infty}$ är ≈ 0

$$\int_{R_\varepsilon} |f| |\sin \tfrac{h}{2} t| \, dt \leq \underbrace{\sup_{t \in R_\varepsilon} \sin |\tfrac{ht}{2}|}_{\to 0} \left(\int_R |f| \right) \to 0$$

$ht \to 0$
då
$|t| < R_\varepsilon$

bevis av (c) i satsen 7.1 ; jämför Sats 2.2 sid 25.
Riemann-Leb. ~~sats~~ lemmat

Jämn/udda funktioner:

$$f(-t)=f(t) \Rightarrow \hat{f}(\omega)=\cancel{\tfrac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

udda också $\quad \hat{g}(\omega)=-2i\int_{0}^{\infty} g(t)\sin\omega t$

Övn. 7.2 Bestäm F-transform för $f=e^{-t}H(t)$; $g=e^{t}(1-H(t))$

$$\hat{f}=\int_{-\infty}^{\infty} f\, e^{-i\omega t}=\int_{0}^{\infty} e^{-t-i\omega t}=\int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}$$

$$=\left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)}\right]_{0}^{\infty}=\frac{1}{1+i\omega}=\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}$$

$$\hat{g}=\int_{-\infty}^{\infty} g e^{-i\omega t}=\int_{-\infty}^{0} e^{t-i\omega t}=\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}=\left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{\dots}=\frac{1+i\omega}{\dots}$$

Anm: beräkna $\hat{f}_\alpha$ då $f_\alpha = e^{-t\alpha} H$ $\alpha > 0$

$$\hat{f}_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha e^{-i\omega t} = \int_0^\infty e^{-t\alpha \cancel{\alpha} - i\omega t} = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t}$$

$$= \frac{1}{\alpha + i\omega} = \cancel{\left(\frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right)}$$

$$\alpha \to 0 \Rightarrow \frac{1}{i\omega}$$

~~Fråga~~: ~~Då~~ vi ser att $\hat{f}_\alpha \to \frac{1}{i\omega}$

Fråga: stämmer det att

$$\hat{f}_\alpha \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \hat{f}_0 \; ?$$ (undersök)

svar Nej

~~Då~~ $\hat{f} = \hat{H} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$

7.3 Egenskaper

~~Sats~~

Sats 7.2 $\mathcal{F}: f \to \hat{f}$ är en linear avbildn.

$L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\hat{\mathbb{R}})$ = kont. ~~med~~ som $\to 0$ i $\pm\infty$

Bevis: Från tidigare sats följer att $\hat{f} \in C_0(\hat{\mathbb{R}})$

$\mathcal{F}$ är linear: $\mathcal{F}(\alpha f + g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$ självklart

Sats 7.3 låt $f_a(t) := f(t-a)$

och om $f \in L^1$:

$$\hat{f}_a(\omega) = \mathcal{F}(f(t-a))(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}(e^{iat} f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$$

Bevis enkel variabelsubst. ..

Sats 7.4

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

om $f,\ tf \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ är deriverbar och att

$$\widehat{tf(t)}(\omega) = \cancel{i\hat{f}'(\omega)} = i(\hat{f})'$$

Bevis.

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-it\omega}\, dt = \underbrace{\Big[f(t) e^{-it\omega} \Big]_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ (tekniskt)}} -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} (-it\omega) f(t) e^{-it\omega} = i\omega \hat{f}(\omega)$$

$$\widehat{(tf(t))}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) e^{-it\omega}\, dt = \cancel{f(t) \frac{e^{-it\omega}}{-i\omega}}$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{d\omega}\left(e^{-it\omega} \right) dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formellt}}}{=} i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega}$$

$$= i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega).$$

Tillämpningar av satser:

$$f(t) = e^{-t^2/2}$$

$f' = -te^{-t^2/2}$ och vi har

$$\boxed{f'(t) + tf(t) = 0} \xRightarrow{\mathcal{F}\text{-transf.}}$$

$$\mathcal{F}\left(f' + tf\right) = \hat{f'}(\omega) + \widehat{(tf(t))}(\omega) = 0$$

$$\Rightarrow \quad i\omega \hat{f}(\omega) + i\left(\hat{f}(\omega)\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) + \omega \hat{f}(\omega) = 0}$$ dvs. f och $\hat{f}$

satisfieras samma diff ekv.

vi kan lösa denna diff.-ekv genom integrerande

faktor ($y' + ty = 0$ ger $y = Ce^{-t^2/2}$)

så $\hat{f}(\omega) = Ce^{-\omega^2/2}$; $C = \hat{f}(0) = \int_R f(t)\,dt = \int_R e^{-t^2/2}$

$= \sqrt{2\pi}$

$$\hat{f} = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$$

övn

7.8: Bestäm $\widehat{f(2t)}$; $\widehat{f(2t+1)}$; $\widehat{f(2t+1)e^{it}}$

då $f(t)$ har F-trans $\hat{f}(\omega) = e^{-\omega^4}$

[Bestäm F-transf. för $f(2t)$ …]

Lös.

$$\widehat{f(2t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(2t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \{s = 2t\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-i\omega \cdot s/2}\, \frac{ds}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-i\left(\frac{\omega}{2}\right)s}\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\omega}{2}\right)^4}$$

$$\widehat{f(2t+1)} = \hat{f}_a(2t) = e^{-ia\omega}\,\widehat{f(2t)} =$$

$\boxed{a = -1 \text{ formell 7.11}}$

$$= \{a = -1\} = e^{i\omega}\,\frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

$$\widehat{f(2t+1)e^{it}} = \left(\widehat{f(2t+1)}\right)(\omega - 1) = e^{i(\omega-1)} \cdot \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{\omega-1}{2}\right)^2}$$

$\boxed{\text{formell 7.12, } a=1}$

Övn. 7.10 B Bestäm $\mathcal{F}$-transformen av

$f(t)\cos at$, $f(t)\cos^2 at$ $(a \neq 0$, reellt$)$

i termer av $\hat{f}$.

Lös. $\cos at = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$

$$\widehat{\left(f(t)\cos a(t)\right)}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\widehat{fe^{iat}} + \widehat{fe^{-iat}}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega-a) + \hat{f}(\omega+a)\right]$$

$$\cos^2 at = \cancel{\left(\frac{e^{ait}+e^{-ait}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[e^{2ait}+e^{-2ait}+2\right]}$$

$$= \frac{\cos 2at + 1}{2}$$

$$\mathcal{F}(f(t)\cos^2 at) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(f\cdot\cos 2at + f) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(f\cos 2at) + \frac{1}{2}\hat{f}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega-2a) + \hat{f}(\omega+2a) + \hat{f}\right)$$

7.4 Inversion satsen

Sats 7.5 $f \in L^1$, f kont. med undantag för ett ändligt antal punkter på $(-A, A)$; och att
$$f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right] \quad \forall t.$$
Då gäller det att
$$f(t_0) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} \, d\omega$$
$\forall t_0$ ~~med~~ där f har hög, vänst. derivator.

För beviset använder vi

Lemma 7.1 $I(A) = \int_0^\infty \frac{\sin Au}{u} \, du = \frac{\pi}{2} \quad \forall A > 0$

[Bevis: $I(A) = I(1)$; använd variabelsubst $t = Au$;

Alltså räcker att beräkna $I(1)$ ∗

använd $\frac{1}{u} = \int_0^\infty e^{-ux} dx$; $I(1) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux} \sin x \, dx du$

$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-ux} \sin u \, du \right) dx = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$

Bevis av sats 7.5

Låt $S(t_0, A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega) e^{it_0\omega}\, d\omega$

och skriv formeln för $\hat{f}$ och byt ordningen

för integraler:

$$S(t_0, A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt\right) e^{i\omega t_0}\, d\omega$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{absolut} \\ \text{konv.} \\ \text{integral}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-A}^{A} f(t) e^{i\omega(t_0-t)}\, d\omega\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{e^{i\omega(t_0-t)}}{i(t_0-t)}\right]_{\omega=-A}^{\omega=A} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin(A(t_0-t))}{t_0-t}\, dt = \{\text{variabel subst}\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0-u)\,\frac{\sin Au}{u}\, du = \left(\begin{matrix}\text{använd} \\ \text{lemmat innan}\end{matrix}\right)$$

$\Longrightarrow$

$= \cancel{\frac{1}{\pi}}$

Låt oss nu betrakta halva intervallet dvs $(0,\infty)$ 15

så $s(t_0,A) = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} = I_{-\infty,A} + I_{+\infty,A}$

och

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t_0-u)\,\frac{\sin Au}{u}\,du =$$

extra

$$\left\{\begin{matrix}\text{lemmat}\\ \text{innan}\end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(f(t_0-u)\frac{\sin Au}{u} - f(t_0^-)\frac{\sin Au}{u}\right)du + f(t_0^-)$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[f(t_0-u) - f(t_0^-)\right]\frac{\sin Au}{u}\,du}_{I_A} + f(t_0^-)$$

visa nu att $I_A \to 0$ [se boken sid. 173]

dvs. $2I_{+\infty,A} \to f(t_0^-)$

p.s.s. $2I_{-\infty,A} \to f(t_0^+)$

och $s(t_0,A) \to \dfrac{f(t_0^+)+f(t_0^-)}{2}$

ex. $f(t) = e^{-|t|} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow$

$$e^{-|t|} = \frac{1}{\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2}\, d\omega$$

eftersom $\hat{f}$ är absolut integrabel så

$$e^{-|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2}\, d\omega$$

byter vi plats mellan $t \leftrightarrow \omega$: ~~(eller ...)~~ och sen ~~får vi~~ $\omega \to -\omega$ får vi

$$\pi e^{-|\omega|} = \cancel{\frac{1}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2}\, dt$$

dvs.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

ex. 7.4 själva

se ex. 7.5, 7.6 (sgrälvad) (17

Övn. 7.12 Bestäm $\mathcal{F}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)$

lite svårt att göra direkta beräkningar!

använd derivata

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-i\omega t}\,dt = \left[\begin{matrix}\text{problem} \\ \text{med integr.?}\end{matrix}\right]$$

$$= -i\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1-\cos t}{t} e^{-i\omega t}}_{\text{udda}} = -i\cdot 2\int_{0}^{\infty} \frac{(1-\cos t)\sin\omega t}{t}$$

"$-\pi$"

$$= \underbrace{-2i\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega t}{t}}_{\begin{matrix}\pi/2 & \omega>0 \\ -\pi/2 & \omega<0\end{matrix}}}_{-i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)} + 2i\int_0^{\infty} \frac{\cos t\sin\omega t}{t} = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\omega) + 2iI$$

→

För I har vi $\quad \cos t \sin\omega t = \frac{1}{2}\left[\sin(\omega-1)t + \sin(\omega+1)t\right]$

$$\Rightarrow \quad 2iI = \underbrace{i\int_0^\infty \frac{\sin(\omega-1)t}{t}}_{\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega-1)} + \underbrace{i\int_0^\infty \frac{\sin(\omega+1)t}{t}}_{\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega+1)}$$

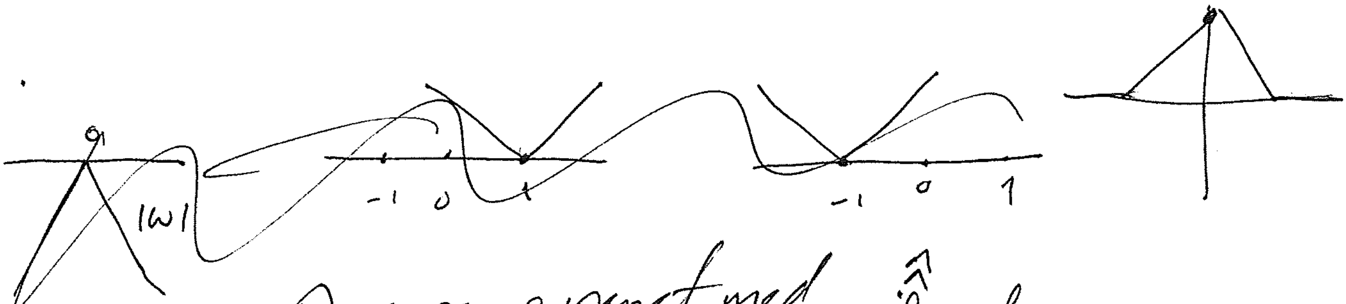
$$= \frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega-1) + \frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega+1)$$

Alltså

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = -i\pi\operatorname{sgn}(\omega) + \frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega-1) + \frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega+1)$$

$$\hat{f}(\omega) = -i\pi|\omega| + \frac{i\pi}{2}|\omega-1| + \frac{i\pi}{2}|\omega+1|$$

$$= 2i\pi\left[-2|\omega| + |\omega-1| + |\omega+1|\right] = 4i\pi\begin{cases} 1-\omega & 0<\omega<1 \\ 1+\omega & -1<\omega<\end{cases}$$



prova svaret med $\hat{\hat{f}} = f\, 2\pi$

7.5 Faltning (Convolution)

$$(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(t-y)\,dy$$

sats 7.6

$$\mathcal{F}(f*g) = \hat{f}\cdot\hat{g}$$

$$\mathcal{F}(f*g) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t-y)\,g(y)\,dy\right)dt$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \cdots$$

Ex. Bestäm f då $\hat{f} = \dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$.

Lös. $\hat{g}(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$ om $g(t) = e^{-|t|}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(g*g) = \hat{g}\cdot\hat{g} = (\hat{g})^2 = 4\hat{f} \Rightarrow$$

se sid 177

For $t>0$: $4f = g*g = \int^{\infty} e^{-|t-y|}e^{-|y|}\,dy = \dots = (1+t)e^{-t}$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{4}(1+|t|)e^{-|t|}$$ (se boken)

<u>ex. 7.10</u> $\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$

vi har

$$\widehat{fg}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)e^{ist}\,ds\right] g(t) \cdot e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-it(\omega-s)}\,dt\right]}_{\hat{g}(\omega-s)} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\,\hat{g}(\omega-s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$$

7/6 Plancherels formel (jfr Parsevals)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2$$

Se sidan 180,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} |f|^2$$

där $c_n = \frac{1}{2p}\hat{f}(P, \frac{n\pi}{p})$ (sid 165)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4p^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(P, \frac{n\pi}{p})|^2 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} |f|^2 dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-p}^{p} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(P, \frac{n\pi}{p})|^2 \frac{\pi}{p}}_{\to \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}$$

$p \to \infty$

7.7 – 7.9 Tillämpningar

(E) $\quad u_{xx} = u_t \qquad t > 0 \qquad x \in R$

(I) $\quad u(x,0) = f(x) \qquad x \in R$

(ingen randdata på R)

~~$\hat{f}(\omega) = 1$~~ anta $f \in L^1$ så $\hat{f}$ exist.

$$U(\omega,t) = \mathcal{F}_x(u(x,t))(\omega) = \int_R u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\omega) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x(u) = \frac{\partial}{\partial t} U$$

så $(\hat{E}) \quad -\omega^2 U = \dfrac{\partial U}{\partial t}$ $\quad \left[\ \hat{u}_{xx} = \widehat{\partial_{xx} u} = -\omega^2 U \ \right]$

$(\hat{I}) \quad U(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$

$$\Rightarrow \quad U = C e^{-\omega^2 t}$$

$U(\omega,0) = \hat{f}(\omega) \Rightarrow \quad C = \hat{f}(\omega)$

$$\boxed{U(\omega,t) = \hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 t}}$$

$\Longrightarrow$

nu är $\hat{U} =$ produkt. av 2 $\mathcal{F}$-transf.

så $$e^{-\omega^2 t} = \mathcal{F}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}}_{E(x,t)}\Big)$$

$$\hat{U} = \hat{f}\cdot\hat{E} \Rightarrow u = E * f = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4t} f(x-y)\,dy$$

$t > 0$

[Läs diskussionen på sidan 182-185]

<u>78</u>

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in R \quad y > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in R \\ u \text{ begränsad} & y > 0 \end{cases}$$

p.s.s. $\mathcal{F}_x$-transform

$$\widehat{u_{xx}} = -\omega^2 U(\omega, y)$$

$$\widehat{u_{yy}} = \partial_{yy}^2 U(\omega, y)$$

$$-\omega^2 U + \partial_{yy}^2 U = 0$$

$$\Rightarrow \quad U(\omega, y) = C(\omega)\, e^{-y|\omega|}$$

initial data ger $C(\omega) = \hat{f}(\omega)$

$$U(\omega, y) = \hat{f}(\omega) e^{-y|\omega|}$$

men $e^{-y|\omega|} = \mathcal{F}\Big(\underbrace{\frac{y}{\pi} \cdot \frac{1}{y^2+x^2}}_{P_y}\Big) = \mathcal{F}(P_y)$

$$U = \hat{f}\,\hat{P}_y = f * P_y\,(x) =$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt$$

Poisson integral formel i $\underline{y > 0}$

Jfr med Poissonintegralformel i disken

$\underline{7.9}$ ösäkra

7.49

Bestäm lösningen till int-ekv

(liknande övn i boken 7.18, 7.19, 7.22, 7.52, 53, 54)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t-y)}_{f_y(t)} e^{-|y|}\,dy = e^{-t^2/2}$$

F-transf.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathcal{F}(f(t-y))}_{\hat{f}(t)e^{-iyw}} e^{-|y|}\,dy = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}w^2}$$

$$\hat{f}(w) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyw} e^{-|y|}\,dy = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}w^2}$$

$$\cancel{2\int_0^{\infty} e^{-y} + \int_{-\infty}^{0} e^{y}}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} e^{-iyw}}$$

$$\mathcal{F}(e^{-|y|}) = \frac{2}{1+w^2}$$

ex 7.3

$$\hat{f}(w) \cdot \frac{2}{1+w^2} = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}w^2}$$

$$\hat{f} = \left(\frac{1+w^2}{2}\right)\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}w^2} \quad \text{etc...}$$