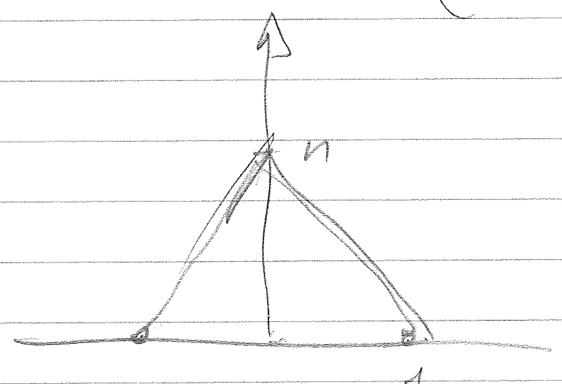
Lektion 5

4.8 Fouriers serien för distributioner

Betrakta

$$f_n(x) = \begin{cases} n & |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



$-\frac{1}{2n}$ $\frac{1}{2n}$

Vi har att $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \; ; \; x \neq 0$

$$f_n(0) = n \longrightarrow \infty$$

$$\int f_n = 1 \qquad \forall n$$

Vidare är

Övn. 1
$$\int_{-1}^{1} \varphi f_n = n \int_{-1/2n}^{1/2n} \varphi(x) \xrightarrow{} \varphi(0)$$
visa?

Så vad är $\lim_{n \to \infty} f_n =: f$

Är f en funktion?

Övn. 1: lösning:

sätt $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\xi)$

Taylorutveckling

$$\int_{-1}^{1} \varphi f_n = n \int_{-1/2n}^{1/2n} \varphi = \varphi(0) + \underbrace{n \int_{-1/2n}^{1/2n} x\varphi'(\xi)}_{\to 0}$$

$|\varphi'| \leq M$ begränsad

Låt nu

$$\phi_n(x) = \begin{cases} n\left((nx)^2-1\right)^2 & |x|<1/n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(jfr övn. 2.21)

vi kan visa

$$\phi_n' \longrightarrow \delta' \quad (\text{visa})$$

$$\phi_n \longrightarrow \delta$$

vidare kan man visa

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n(x) f(x) = f(0)$$

för kontinuerliga funktioner

(använd ideerna för övn.1)

Visa att

$$\lim_{n\to\infty}\int \psi_n'(x)\, f(x) = -f'(0)$$

bevis:

$$\int_{-1/n}^{1/n} \psi_n' f = \underbrace{\Big[\psi f\Big]_{-1/n}^{1/n}}_{=0} - \int_{-1/n}^{1/n} \psi f' \to -f'(0)$$

Formalism:

Definiera $\delta_a(t)$ som Dirac

function med stödd/puls i $t=a$

om $\int \delta_a(t) f(t) = f(a)$ $\forall$ kontin. fkner f

(5

Definiera δ_a' som den "fkn"

$$\int \delta_a'(t) f(t) = -f'(a) \quad \left(\begin{array}{l}\text{alla} \\ f \text{ ders verka}\end{array}\right)$$

Fråga: Vad är F-serien

för δ_a ?

Formellt kan vi skriva

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \delta_a(t) e^{-int} dt$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{dvs.} \quad c_n^j = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \varphi_j(t) e^{-int} \longrightarrow c_n \\ \\ \text{då} \quad \varphi_j \longrightarrow \delta_a \end{array}\right]$$

konvergens ?

vi får

$$c_n = \frac{1}{2\pi} e^{-ina}$$

och

$$\delta_a(t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ina} e^{int}$$

då $a = 0$ har vi

$$\delta_0(t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbb{Z}} e^{int} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt$$

$$= D_\infty(t) \quad \left(\begin{array}{c}\infty\text{-Dirichlet}\\ \text{kärnan}\end{array}\right)$$

så

$$\delta(t) = \lim_{N \to \infty} D_N(t)$$

Man kan visa (boken sid 97-98) (7

$$\sum_{\mathbb{Z}} e^{in(t-a)} \underset{\text{visa}}{=} \begin{cases} 0 & t \neq a \\ \infty & t = a \end{cases}$$

och detta representerar

δ- funktionen!

$\boxed{\text{sätt } z = e^{i(t-a)};\ |z| = 1;\ \text{etc.}}$

Vi beräknar/bestämmer δ_a'.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta_a' e^{-int} = [\text{enligt def.}]$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \left(e^{-int} \right)' \Big|_{t=a} =$$

$$-\frac{1}{2\pi} \left(-in e^{-int} \right) \Big|_{t=a} = \frac{in}{2\pi} e^{-ina}$$

Därför

$$\delta_a'(t) \approx \frac{i}{2\pi} \sum_{\mathbb{Z}} (n e^{-ian}) e^{int}$$

$$= \frac{i}{2\pi} \sum_{\mathbb{Z}} n e^{in(t-a)}$$

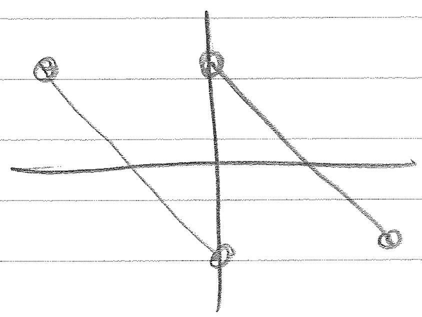
då $t \neq a$ så kan man visa att

serien är konvergent och $= 0$

(visa detta! Använd delsummorna)

<u>Ex. 4.8:</u> Låt $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ $0 < t < \pi$

och $f(t)$ udda



$\longrightarrow$

(9

från tidigare (ex. 4.2 sid. 78) har vi

$$F_f(t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2in} e^{int}$$

Derivatan för f:

$$f' = -\frac{1}{2} + \pi \delta_0(t)$$

$$F_{f'} = F_{(-\frac{1}{2})} + \pi F_{\delta} = -\frac{1}{2} + \pi \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{int}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt$$

man kan beräkna F_f' formellt och

få $\boxed{F_{f'} = F_f'}$

Ex. 4.9 Bestäm 2π-periodiska

lösningen för

$$\begin{cases} y' + y = 1 + \delta(t) \\ -\pi < t < \pi \end{cases}$$

Lös. Ansätt $y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$

vi har

$$y' = \sum_{\mathbb{Z}} i n c_n e^{int}$$

samt $\delta = \sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{int}$

Ekvationen ger

$$\sum i n c_n e^{int} + \sum c_n e^{int} = 1 + \sum \frac{1}{2\pi} e^{int}$$

$\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad c_0 = 1 + \frac{1}{2\pi}$$

$$c_n: \quad in\,c_n + c_n = \frac{1}{2\pi}$$

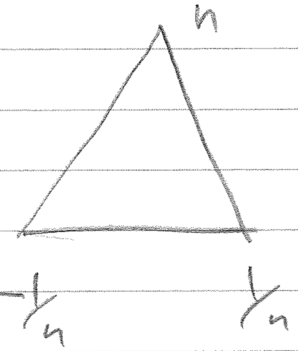
$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{2\pi(1+in)}$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(1 + \frac{1}{2\pi}\right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{int}}{1+in}$$

Läs sidan 99 och jfr ex. 4.1 sid 76

Ex. Låt

$$g_n(x) = \begin{cases} n^2\left(\frac{1}{n}+x\right) & -\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ n^2\left(\frac{1}{n}-x\right) & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



vi har $\int g_n = 1$

g positiv kärna

$$g_n' = \begin{cases} n^2 & -1/n < x < 0 \\ -n^2 & 0 < x < 1/n \\ \text{odefin.} & x = 0, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$$\int_{-1/n}^{1/n} g_n' \varphi = -n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} (\varphi(x) - \varphi(-x)) =$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Taylor}\\ \text{utveckl.}\end{matrix}\right\} = -n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \left(2\varphi'(0)\cdot x + \frac{x^2}{2}\varphi'(\xi_x)\right) =$$

$$= -\varphi'(0) - \frac{n^2}{2}\int_0^{1/n} x^2 \varphi'(\xi_x)\, dx$$

$$= \{|\varphi'| < M\} \Rightarrow$$

$$\left|\int_{-1/n}^{1/n} g_n'\varphi + \varphi'(0)\right| \leq \frac{n^2}{2}\cdot M \int_0^{1/n} x^2 =$$

$$= \frac{n^2}{2} M \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 \frac{1}{3} \to 0$$

dvs $\displaystyle\int_{-1/n}^{1/n} g_n'\varphi \to -\varphi'(0)$

5.1 L^2-teori

Komplexa vektorrum $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$

$$\bar{z} = (z_1, \ldots, z_n)$$

norm $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n$

$$|z| = \sum_1^n z_i^2 = \text{reellt tal}$$

Def. 5.1 komplex vektorrum V;

med inre produkt

$$\langle u, v \rangle$$

s.a.

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \ ;$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$$

ex. $\mathbb{C}^n$: $\langle z, w \rangle = \sum_1^n z_i \overline{w_i}$

ex. $C([a,b])$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

eller viktade rum

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f \bar{g} \, w \, dx$$

w = vikt : $w(x) > 0$

norm $$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

$$\|f\|_w^2 = \int_a^b |f|^2 w(x) \, dx$$

Sats:

(1) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$ Cauchy-Schw

(2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ Triangelolik.

Bevis: (1) Anta $u \neq 0$ annars ok.

sätt $\alpha := -\dfrac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle} = -\dfrac{\langle v,u\rangle}{\|u\|^2}$

$0 \leq \|\alpha u+v\|^2 = \langle \alpha u+v, \alpha u+v\rangle =$

$= \alpha\bar{\alpha}\langle u,u\rangle + \alpha\overbrace{\langle u,v\rangle}^{\overline{\langle v,u\rangle}} + \bar{\alpha}\langle v,u\rangle +$

$+ \langle v,v\rangle = |\alpha|^2\|u\|^2 +$

$+ \underbrace{\overline{\bar{\alpha}\langle v,u\rangle}}_{-|\alpha|^2\|u\|^2} + \underbrace{\bar{\alpha}\underbrace{\langle v,u\rangle}_{-\alpha\|u\|^2}}_{-|\alpha|^2\|u\|^2} + \|v\|^2 =$

$= -|\alpha|^2\|u\|^2 + \|v\|^2 \implies$

$$0 \leq -|\alpha|^2 \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\alpha|^2 \|u\|^2 \leq \|v\|^2$$

men $\alpha = -\dfrac{\langle v, u\rangle}{\|u\|^2}$

$$\left| \frac{-\langle v, u\rangle}{\|u\|^2} \right|^2 \|u\|^2 \leq \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

(2) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v\rangle + \underbrace{\langle v, u\rangle}_{\overline{\langle u, v\rangle}}$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\langle u, v\rangle}_{\leq 2|\langle u, v\rangle|}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{använd} \\ (1)\end{matrix}\right\} \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

Alternativt bevis för (1)

sätt $w = \frac{u}{\|u\|}$, $z = \frac{v}{\|v\|}$

och visa

$$|\langle w, z \rangle| \leq 1$$

med $\alpha = -\langle w, z \rangle$ och

$$0 \leq \|\alpha w + z\| = \dots = -|\langle w, z \rangle|^2 + 1$$

etc.

<u>Ortogonalitet.</u> $\langle u, v \rangle = 0$

<u>normerad</u> $\|u\| = 1$

<u>ON mängd</u> $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

$$\|u_i\| = 1$$

Ex. $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f \bar{g}$

är vår inre produkt.

Välj $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ $k \in \mathbb{Z}$

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Ex 5.6 (Gram-Schmidt)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g} \underbrace{(1+x)}_{\text{vikt}} dx$$

$$\mathcal{P}_2 := \{\text{andragradspolynom}\}$$

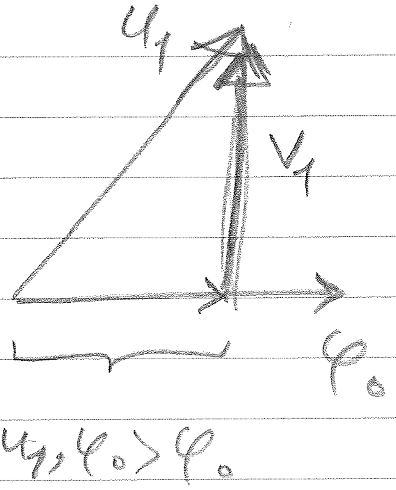
En bas i $\mathcal{P}_2$: $u_0 = 1$, $u_1 = x$, $u_2 = x^2$

Ortonormalisera:

$$V_0 = u_0 \quad ; \quad \|V_0\|^2 = \ldots = 3/2$$

så att $\varphi_0 = \dfrac{V_0}{\sqrt{3/2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$$V_1 = u_1 - \langle u_1, \varphi_0 \rangle \varphi_0$$



$\langle V_1, \varphi_0 \rangle = 0$

ortogonal

$$\langle u_1, \varphi_0 \rangle = \int_0^1 x \sqrt{\frac{2}{3}} (1+x)\, dx = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$V_1 = x - \frac{5}{6}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = x - \frac{5}{9}$$

$$\|V_1\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{5}{9}\right)^2 (x+1)\, dx = \frac{13}{108}$$

$\rightarrow$

$$\varphi_1 = \frac{x - 5/9}{\sqrt{\frac{13}{108}}} = 6\sqrt{\frac{3}{13}}\left(x - \frac{5}{9}\right)$$

$$V_2 = u_2 - \underbrace{\langle u_2, \varphi_0 \rangle \varphi_0}_{\text{proj i } \varphi_0} - \underbrace{\langle u_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1}_{\text{proj. i } \varphi_1}$$

$$\langle V_2, \varphi_1 \rangle = 0$$

$$\langle V_2, \varphi_0 \rangle = 0$$

$$\langle u_2, \varphi_0 \rangle = \frac{7}{36}\sqrt{6}$$

$$\langle u_2, \varphi_1 \rangle = \frac{34}{585}\sqrt{39}$$

$$V_2 = x^2 - \frac{68}{65}x + \frac{5}{26}$$

$$\|V_2\|^2 = \frac{21}{2600}$$

$\longrightarrow$

$$\varphi_2 = \frac{10}{21}\sqrt{546}\left(x^2 - \frac{68}{65}x + \frac{5}{80}\right)$$

<u>Sats</u> Om $\{\varphi_j\}_1^N$ är en ON-bas i N-dimensionella rummet V, så gäller det att för varje $u \in V$

$$u = \sum_{j=1}^{N} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$$

med
$$\|u\|^2 = \sum_{1}^{N} |\langle u, \varphi_j \rangle|^2$$

samt
$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle u, \varphi_j \rangle \overline{\langle v, \varphi_j \rangle}$$

Övn. 5.3 Är vektorerna

$1, x, \dots, x^n, \sin x, \cos x, e^x$

lin. oberoende i $C(0,1)$

(n = positivt heltal)

Lös: Om $\sum_{0}^{n} \alpha_i x^i + a \sin x + b \cos x + c e^x = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0$ och $a = b = c = 0$

$\Rightarrow$ dvs lin oberoende