Lektion 6

5.2 – 5.4

5.2 Ortogonal projection

Låt $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ vara en ortonormal

mängd i V (Hilbertrum)

Då är ortogonalprojektionen av

$u \in V$ över delrummet

$W = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ lika med

$$P_N(u) := \sum_{i=1}^{N} \langle u, \varphi_i \rangle \varphi_i$$

Sats 5.5 (Minsta kvadratmetoden)

Låt $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ vara en ortonormal mängd i V (inre produktrum) och låt $u \in V$. Låt vidare

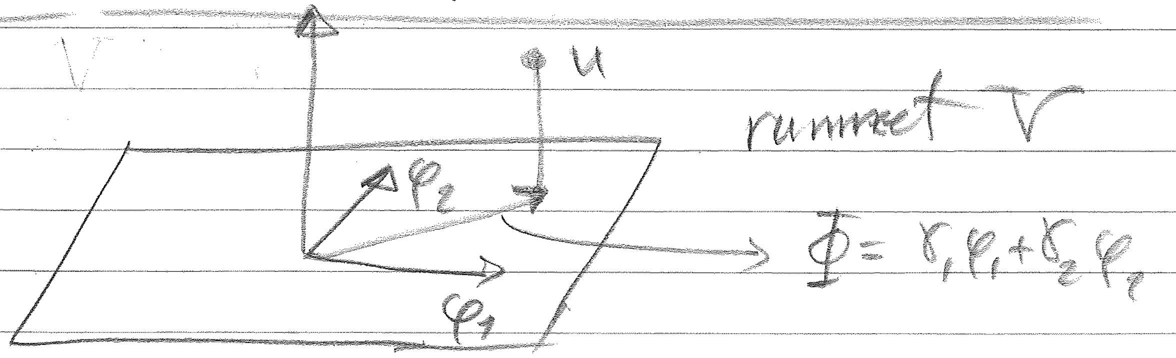
$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \varphi_k \;; \quad \gamma_k \text{ reella/komplexa tal}$$

Då gäller det att

$$\inf_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} \|u - \Phi\|$$

uppnås för $\gamma_k = \langle u, \varphi_k \rangle$ (enbart)

Dvs. $u = P_N(u)$



Bevis

$$\|u-\Phi\|^2 = \langle u-\Phi,\, u-\Phi \rangle =$$

$$= \|u\|^2 - \langle u, \Phi \rangle - \langle \Phi, u \rangle + \|\Phi\|^2$$

$$= \left\{ \Phi = \sum \gamma_k \varphi_k \right\} =$$

$$= \|u\|^2 - \sum \bar{\gamma}_k \underbrace{\langle u, \varphi_k \rangle}_{c_k} - \sum \gamma_k \underbrace{\langle \varphi_k, u \rangle}_{\bar{c}_k}$$

$$+ \sum_k \sum_j \gamma_k \bar{\gamma}_j \underbrace{\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle}_{\delta_{kj}} =$$

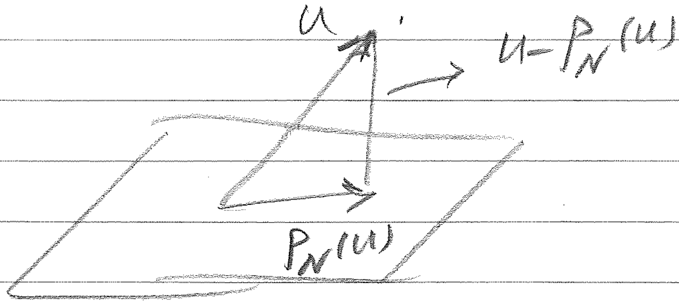
$$= \|u\|^2 + \sum_k \left(\gamma_k \bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_k c_k - \gamma_k \bar{c}_k + c_k \bar{c}_k \right) -$$

$$- \sum_k c_k \bar{c}_k = \underbrace{\|u\|^2}_{\text{fix}} + \underbrace{\sum |\gamma_k - c_k|^2}_{\text{ska minimeras}} -$$

$$- \underbrace{\sum |c_k|^2}_{\text{fix}} = \text{minst om } \gamma_k = c_k$$

Vektorn $u - P_N(u)$ kallas

residual



$$u = P_N(u) + (u - P_N(u))$$

obs! $\quad u - P_N(u) \perp P_N(u)$

samt $\quad \|u - P_N(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|P_N(u)\|^2$ (1)

Pytagoras sats

vidare: $\|P_N(u)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{N} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|^2 =$

$$= \sum_{k,j}^{N,N} \langle u, \varphi_k \rangle \overline{\langle u, \varphi_j \rangle} \underbrace{\varphi_k \overline{\varphi_j}}_{\delta_{kj}} =$$

$$= \sum_{1}^{N} |\langle u, \varphi_k \rangle|^2$$

$\rightarrow$

Ekv. 1 ger att (V.L. ≥ 0)

$$0 \leq \|u\|^2 - \|P_N(u)\|^2$$

dvs.

$$\|P_N(u)\| \leq \|u\|$$

dvs.

$$\sum_1^N |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

Då $N \to \infty$ får vi Bessel olikheten

$$\sum_1^\infty |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

<u>Def.</u> Vi säger att systemet $\{\varphi_i\}$ i V är <u>komplett</u> i V om för varje $u \in V$ och $\varepsilon > 0$ $\exists$ lin. komb.

$$\sum_1^N a_i \varphi_i \; : \; \|u - \sum_1^N a_i \varphi_i\| < \varepsilon \qquad N = N_\varepsilon$$

Sats 5.4 (Parshevals formel)

Ett ON system är komplet i V omm för varje $u \in V$

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_j \rangle|^2$$

Bevis: välj N stort. Vi har

$$\Big\| u - \sum_{1}^{N} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k \Big\|^2 \underset{\text{(visa)}}{=} \|u\|^2 - \sum |\langle u, \varphi_k \rangle|^2$$

$\leq$ (också enligt sats 5.3) $\leq \Big\| u - \sum_{1}^{N} \gamma_k \varphi_k \Big\|^2 < \varepsilon$

om $\{\varphi_k\}$ komplett och $N \geq N_\varepsilon$ stort

dvs.

$$0 \leq \|u\|^2 - \sum_{1}^{N_\varepsilon} |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 < \varepsilon = \text{godtyckligt}$$

detta visar satsen

<u>Sats 5.6</u> För ett komplett ON system $\{\varphi_j\}$ i V gäller det att

$$\langle u, v \rangle = \sum_{1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \overline{\langle v, \varphi_j \rangle}$$

$$\forall\, u, v \in V$$

<u>Bevis:</u>

sätt $P_n(u) = \sum_{1}^{n} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$

(projektionen) sats 5.2 ger

$$\langle P_n(u), P_n(v) \rangle = \sum_{1}^{n} \langle u, \varphi_j \rangle \overline{\langle v, \varphi_j \rangle}$$

Cauchy-Schwarz ger

$$\left| \langle u, v \rangle - \langle P_n(u), P_n(v) \rangle \right| \leq \text{(visa)}$$

$$\leq \left| \langle u, v - P_n(v) \rangle \right| + \left| \langle u - P_n(u), P_n(v) \rangle \right|$$

$$\leq \|u\| \underbrace{\|v - P_n(v)\|}_{\to 0} + \underbrace{\|u - P_n(u)\|}_{\to 0} \underbrace{\|P_n(v)\|}_{\leq \|v\|} \to 0$$

komplett system

dvs

$$\langle u, v \rangle = \lim_{n} \langle P_n(u), P_n(v) \rangle$$

v.s.v.

<u>Anm.</u>

$$\|u\|^2 = \sum \frac{|\langle u, \varphi_j \rangle|^2}{\|\varphi_j\|^2}$$

parseval

obs! om $\|\varphi_j\| = 1$ så blir det som i boken

p.s.s. för

$\langle u, v \rangle$; $P_N(u)$

Sidorna 114–118 spätra

Övn 5.8 Bestäm konstanterna

a, b: $\int_{-1}^{1} |ax + bx^2 - \sin \pi x|^2 dx$

blir minimal.

Lös. $V = L^2(-1,1)$

$U = \text{span}\{x, x^2\} \subset V$

Låt $v_1 = x$ och $v_2 = x^2$

vi får $\langle v_1, v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = 0$

dvs $v_1 \perp v_2$

sätt $\varphi_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$

$\varphi_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\frac{5}{2}}\, x^2$

$$P_V(\sin \pi x) = \langle \sin \pi x, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \langle \sin \pi x, \varphi_2 \rangle \varphi_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\pi}\varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} x + 0 x^2$$

$$= \underbrace{\frac{3}{\pi}}_{a} x + \underbrace{0}_{b} \cdot x^2$$

Anm. I detta fall kan man göra det snabbare

$$\nabla_{a,b} \int_{-1}^{1} |ax + bx^2 - \sin \pi x|^2 dx \Big|_{(a,b)=?} = (0,0)$$

ger $a = 3/\pi$

$b = 0$

prova!

5.3 självra

5.4 Fourier systemet är komplett

Sats 5.8 (intressant!)

systemet $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$;

$\{\cos nt, n\geq 0; \sin nt, n\geq 1\}$

är var och en kompletta i $L^2(\mathbb{T})$.

Bevis (idé)

L^2-fkner kan ε-approximeras

med kontinuerliga funktioner,

som i sin tur kan ε-approximeras

med C^2 funktioner (ger 2ε-approx)

C^2-fkner har F-serie som konverg

då $|\gamma_n| \le \frac{C}{n^2}$ (sats 4.4)

Alltså $h \in C^2 \Rightarrow |h(t) - S_N(t,h)| < \varepsilon/\sqrt{2\pi}$

$$\|h - S_N(\cdot,h)\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |h(t) - S_N(t,h)|^2 dt \le$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \cdot 2\pi = \varepsilon^2$$

Så

$$\|h - S_N(\cdot,h)\|_{L^2} \le \varepsilon$$

vidare

$$\|f - S_N(\cdot,f)\|_{L^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{minsta} \\ \text{kvadrat metoden}}}{\le} \|f - S_N(\cdot,h)\|_{L^2} \le$$

$$= \|f - \underset{\text{kont}}{g} + g - \underset{C^2}{h} + h - S_N(\cdot,h)\| \le$$

$$\leq \underbrace{\|f-g\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|g-h\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|h-S_N(\cdot,h)\|}_{\leq \varepsilon} < 3\varepsilon$$

eftersom ε är godtycklig

vi får

$$\|f - S_N(\cdot, f)\|_{L^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Konsekvens:

Parsevals formell för $\mathcal{F}$ serie

$$\|f\|^2 = \sum |\langle u, \varphi \rangle|^2 \quad \text{sats } 5.4$$

blir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Anmärkning

Definiera

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = (\ldots, c_{-n}, \ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)$$

$\exists$ en bijektion (injektion + surjektion)

$$A : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$f \longrightarrow \bar{c} = \bar{c}(f)$$

$$\bar{c}(f) = (\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)$$

Fourier koeff för f.

Ex. Låt V vara ett inre-produkt rum (Hilbertrum), och $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ett ortonormerad system i V. Ange villkor för att

$$T : V \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$$u \longrightarrow (u, \varphi_k)_{k=1}^{\infty}$$

ska vara en bijektion.

Svar: systemmet bör vara komplett.

Övn. 5.16 Låt $f(x)$ vara kontin.

på $[0,\pi]$ med $f(0)=f(\pi)=0$

med $f' \in L^2(0,\pi)$.

a) visa att $\int_0^\pi |f(x)|^2 dx \leq \int_0^\pi |f'(x)|^2 dx$

b) För vilka fkner f gäller det

likhet i uppg. a).?

Lös utvidga fknen över $(-\pi,\pi)$

som en udda fkn. (Varför kan vi göra

detta?) så att den nya fknen blir

kont. över $(-\pi,\pi)$.

Låt g vara den utvidgade

fknen.

Vi har $g = f$ på $[0,\pi)$

och

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 = \{\text{parsevall}\} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2$$

$$= \left\{\begin{array}{l} g \text{ udda, ger} \\ \text{bara sinustermer} \\ c_0 = 0 \text{ då} \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \overset{\{f'\in L^2\}}{\underset{\{c_n(f') = in\, c_n(f)\}}{=}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} \frac{|c_n(g')|^2}{n^2}$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g')|^2 \underset{\text{parsevall}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g'|^2$$

men g udda $\Rightarrow$ $|g|$ jämn

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |g|^2 \underset{\substack{g=f \\ \text{på } (0,\pi)}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |f|^2$$

$\rightarrow$

P.s.s. g udda $\xRightarrow[\text{visa}]{}$ g' jämn

så

$$\int_0^{\pi} |f'|^2 = \int_0^{\pi} |g'|^2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |g'|^2$$

och vi få olikheten i a).

(b) om $C_{\pm 1} \neq 0$; $C_n = 0 \ \forall n \neq \pm 1$

då är $f = \sin x$ och vi får

likhet.

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi} (\cos x)^2 dx$$

Anm. Detta problem är relaterad till

poincaré's olikhet! Likhet gäller enbart

för första egenfunktionen!

(djup matte)

Övn. 5.17 Visa att

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n((x^2-1)^n)$$ är parvis

ortogonala $\langle P_n, P_m \rangle = 0 \quad n \neq m$

samt $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$

Lös.

Metod 1 Låt $n > m$

$$\langle P_n, P_m \rangle = \underbrace{\frac{1}{2^n n!\, 2^m m!}}_{= C_{n,m}} \int_{-1}^{1} D^n((x^2-1)^n) D^m((x^2-1)^m)\, dx$$

gör partiell integration

$$= C_{n,m} \Big[D^{n-1}((x^2-1)^n) D^m((x^2-1)^m) \Big]_{-1}^{1} -$$

$$- C_{n,m} \int_{-1}^{1} D^{n-1}((x^2-1)^n) D^{m+1}((x^2-1)^m)\, dx$$

$\rightarrow$

Första uttrycket blir $=0$ då

$$D^{n-k}\left((x^2-1)^n\right) = (x^2-1)^k\,[\,\cdots\,]$$

i ~~x~~ $= \pm 1$ ger detta $=0$

iterera detta partiell integration

$$= C_{n,m}\,(-1)^n \int_{-1}^{1} \underbrace{D^{n-n}\left((x^2-1)^n\right)}_{(x^2-1)^n}\,\underbrace{D^{m+n}\left((x^2-1)^m\right)}_{\substack{=0\\ n>m}} = 0$$

Då $n=m$:

$$= C_{n,n}\,(-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\underbrace{D^{2n}\left((x^2-1)^n\right)}_{\underbrace{D^{2n}(x^{2n} + \text{lägre termer})}_{=(2n)!}}$$

$$= C_{n,n}\,(-1)^n\,((2n)!)\,\underbrace{\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n}_{\frac{(-1)^n\,(n!)^2\,2^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)}} = C_{n,n}\cdot\frac{n!}{2n+1}\,2^{2n+1}$$

$$= \frac{2}{2n+1}$$

$\Rightarrow$

Anm. För $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n$ = använd = $\int_{-1}^{1}(x-1)^n(x+1)^n$

= partiell integr. = ... = $\alpha_n \int (x-1)^{2n}$ = ...

Metod 2 Låt $L(y) = -\left((x^2-1)y'\right)'$

vi har $LP_n = n(n+1)P_n$ (övn. 5.21)

och därmed

$$\int_{-1}^{1} n(n+1)P_nP_m = \int_{-1}^{1} L(P_n)\cdot P_m = \text{partiell int.} =$$

$$= -\underbrace{\Big[(x^2-1)P_n'\cdot P_m\Big]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1}(x^2-1)P_n'\cdot P_m'$$

$$= \cdots = \int_{-1}^{1} P_n L(P_m) = \int_{-1}^{1} m(m+1)P_nP_m$$

$$\Rightarrow \int P_nP_m = 0 \quad \text{om} \quad m \neq n$$

[övn. i boken: sid. 127: 5.18, 5.21]