Lektion 7

(5.5 – 5.6)

Legendre polynomen.

I $L^2(-1,1)$ så är $1, x, x^2, \ldots$ ngn form av "bas"! Rummet är ∞-dimensionell så det är inte enkelt att visa ett sådant påstående!

Låt $\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f \bar{g}$

ortogonalisera $1, x, x^2, x^3, \ldots$

$P_0 = 1$; $P_1 = x$: $\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = 0$

$P_2 =$ använd Gram Schmidt $= \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} D^n\left((x^2-1)^n\right)$$ Rodrigues formell

Lagendre ekv.

$$L(y) = -((1-x^2)y')' = \alpha(\alpha+1)y$$

För $\alpha = n$ heltal är P_n egenvektor

till diff-operatorn L, med

egenvärde $n(n+1)$

Läs ex. 5-12, samt sidorna 267

i Del I boken.

5.6 Andra ortogonala polynom

$L^2_w(0,\infty)$; $w = e^{-x}$ vikt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f\bar{g}\, e^{-x}\, dx$$

Laguerre polynomen

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} D^n(x^n e^{-x})$$

satisfierar ekvationen

$$(*) \quad x y'' + (1-x) y' + n y = 0$$

Q1 visa att L_n är polynom för $n = 0, 1, \ldots$

Q2 visa att $\langle L_m, L_n \rangle = \delta_{mn}$ (Litet svårt)

skriv om ekv. (*) och använd ideerna i metod 2 i övn. 5.17 (Lektion 6)

$$-(x e^{-x} y')' = n e^{-x} y$$

Hermites polynom $L_W(-\infty,\infty)$

$$W=e^{-x^2}, \quad H_n(x)=(-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$$

$$\langle H_n, H_m\rangle = 0 \qquad n\neq m$$

$$\|H_n\|_{L_W} = n!\,2^n\sqrt{\pi}$$

visa detta hemma! Använd motsv. diff ekv. ...

Chebyshev polynom över $L^2_W(-1,1)$

med $W=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$T_n(x)=\cos(n \arccos x)$ är

lösningar till

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

(se del I boken 265, 702)

Skriver man om ekv

$$L(y) := -\left(\sqrt{(1-x^2)}\, y'\right)' = n(1-x^2)^{-1/2} y$$

Så är y en egenvektor med egenvärde

$n(1-x^2)^{-1/2}$ till L.

Använd detta för att visa att

$$\langle T_m, T_n \rangle_{L^2_w} = 0 \qquad m \neq n$$

Övn. 5.28 Låt $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ $|t| \leq 1$.

Bestäm ett tredjegrads polynom $p(t)$

s.a.

$$\int_{-1}^{1} |f(t) - p(t)|^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{minimal}$$

Lös Introducera $L^2_w(-1,1)$ med

$$w = (1-t^2)^{-1/2}$$

Vi måste alltså använda Chebychevs polynom som bildar en ortogonal mängd

$T_0 = 1$; $T_1 = t$, $T_2 = 2t^2 - 1$

$T_3 = 4t^3 - 3t$ (sid 261 i Beta)

Då är

$$Q(t) = \sum_{j=0}^{3} \frac{\langle T_j, f \rangle T_j}{\| T_j \|^2}$$

projektionen av f i delrummet

V = Span{ T_0, T_1, T_2, T_3 }

och vi har enligt minsta kv. metoden

$$\int_{-1}^{1} |f - p|^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \geq \| f - Q \|^2_{L^2_w(-1,1)}$$

Vi har $\|T_j\|^2 = \int_{-1}^{1} T_j T_j \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} \pi & j=0 \\ \pi/2 & j \neq 0 \end{cases}$

se i Beta
sid. 261

$$\langle T_j, f \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\, T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= \left\{ f = \sqrt{1-t^2} \right\} = \int_{-1}^{1} T_j(t)\, dt$$

$$\langle T_0, f \rangle = \int_{-1}^{1} T_0 = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

$$\langle T_1, f \rangle = \int_{-1}^{1} T_1 = \int_{-1}^{1} t\, dt = 0$$

$$\langle T_2, f \rangle = \int_{-1}^{1} (2t^2 - 1)\, dt = 4/3 - 2 = -2/3$$

$$\langle T_3, f \rangle = \int_{-1}^{1} T_3 = \int_{-1}^{1} (4t^3 - 3t)\, dt = 0$$

$$Q = \frac{\overset{\langle T_0, f\rangle}{2}}{\underset{\|T_0\|^2}{\pi}} + 0 \cdot T_1 - \frac{(2/3)\, T_2}{(\pi/2)} + 0 \cdot T_3$$

$Q = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}(2x^2-1)$

Ex. Bestäm minsta avståndet mellan $h = x^3$ och delrummet P_2 i $L^2_w(\mathbb{R})$. Här är

P_2 = polynom av grad högst 2

$w = e^{-x^2}$

samt $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f\bar{g}\, e^{-x^2} dx$

(svar kan ges i form av integral)

Lös Detta inreprodukt ger Hermites polynomen som en ortonormal system

och $P_2 = \text{span}\{H_0, H_1, H_2\}$

$= \text{span}\{1, 2x, 4x^2-2\}$ →

minsta avståndet ges av Resudyn

$$\text{minst} = \| h - Q \|_{L^2_w}$$

där $Q = \operatorname{Proj}_{P_2} h = \{ h = x^3 \}$

$$= \frac{\langle X^3, H_0 \rangle H_0}{\|H_0\|^2} + \frac{\langle x^3, H_1 \rangle H_1}{\|H_1\|^2} + \frac{\langle X^3, H_2 \rangle H_2}{\|H_2\|^2}$$

uträkning ger $\langle X^3, H_0 \rangle = \langle X^3, H_2 \rangle = 0$

och $Q = \dots = \frac{3}{2} x$

och vi har

$$\text{minsta avst.} = \| x^3 - \tfrac{3}{2} x \|_{L^2_w} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x^3 - \frac{3}{2} x \right)^2 e^{-2x^2} = \underbrace{2 \int_0^{\infty} \left(x^6 + \frac{9}{4} x^2 - 3x^4 \right) e^{-x^2}}_{\text{svar}}$$