Lektion 8

(6.1, 6.2)

6.1 Fourier problemet från lektion 7

(E) $u_{xx} = u_t \qquad 0 < x < \pi \qquad t > 0$

(B) $u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \qquad t > 0$

(I) $u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < \pi$

We kom fram till en lösning

för (E) – (B) men inte (I)!

Lösningen var

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

$\forall N = 1, 2, \ldots$

(2

Vi vill låta $N \to \infty$ och

välja b_n s.a. $u_\infty(x,0) = f(x)$

då $0 < x < \pi$.

Definiera $f(x) = -f(-x)$

då $-\pi < x < 0$, dvs. udda utvidgning

av f. Fourier koeff. för f blir

då $a_n(f) = 0$ udda fkn

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\, dx$$

Vi ser att serien

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Konvergerar om $|b_n| \le M$ = begrän

Detta gäller då $t > 0$, eftersom

$$|b_n e^{-n^2 t}| \to 0$$ tillräckligt snabbt.

problem uppstår då $t \to 0$!

låt oss välja $b_n = b_n(f)$ och vi

får

$$b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \xrightarrow[t \to 0]{} b_n \sin(nx)$$

och vi behöver konvergens för $\sum |b_n|$

Anm. om $f \in C^2$ så vet vi att

$$|b_n| \leq \frac{C}{n^2} \quad (\text{sats 4 sid. 83})$$

och då får vi $\sum |b_n|$ konvergens

→

Låt nu $f \in L^2(0,\pi)$ och fixera t. Vi har

$$\|u(x,t)\|^2 = \int_0^\pi |u(x,t)|^2 dx = \begin{Bmatrix}\text{Parseval} \\ \text{för } u(x,t)\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n e^{-n^2 t}|^2 \leq \frac{\pi}{2} \sum |b_n|^2 =$$

$$= \begin{Bmatrix}\text{Parseval för} \\ f\end{Bmatrix} = \|f\|^2$$

Dvs.

$$\|u(x,t)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \quad \forall t > 0$$

dvs. $u(x,t) \in L^2(0,\pi) \quad \forall t > 0$

och normen är begränsad oberoende av t.

vi får

$$\|f(x) - u(x,t)\|^2_{L^2} \overset{\text{parseval}}{=}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 (1 - e^{-n^2 t})^2 =: \Phi(t)$$

Φ konv. likformigt över $t \geq 0$

och är kontinuerlig i t. Därför

$$\lim_{t \to 0} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$$

Dvs.

$$\|f - u(x,t)\|_{L^2} \to 0 \quad \text{då } t \to 0$$

eller

$$\lim_{t \to 0} \int_0^{\pi} |u(x,t) - f(x)|^2 = 0$$

Detta medför att för L^2-fkner f vi har lösning till Fourier problemet.

6.2 olika form av Fourier problemet

Ex. (E) $u_{xx} = u_t$ $\quad 0 < x < \pi$, $t > 0$

(I) $u(x,0) = f(x)$ $\quad 0 < x < \pi$ initialdata

Vi antar flödet längs $x=0$, $x=\pi$ är lika med 0, dvs. isolering:

(B) $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$

Hur ka vi hitta lösningen?

Använd separation av variabler

$$u = X(x)\,T(t) \xrightarrow{\text{leder till}}$$

$$X'' + \lambda X = 0 \;, \quad T' + \lambda T = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 & \text{randdata} \end{cases}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = \text{konstant} \\ T = \text{konst.} \end{cases} \Rightarrow u = \text{konst.}$$

$\lambda > 0$: sätt $\lambda = \omega^2$ $(\omega > 0)$

$$X'' + \omega^2 X = 0 \Rightarrow$$

$$X = A \cos\omega x + B \sin\omega x$$

$$X' = -\omega A \sin\omega x + B \cos\omega x$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X'(\pi) = 0 \Rightarrow -\omega A \sin\omega\pi = 0$$

$\rightarrow$

om $A \neq 0 \Rightarrow \sin \omega \pi = 0$

$\Rightarrow \quad \omega = n^2 \Rightarrow X_n(x) = \cos nx$

För T har vi $T' + n^2 T = 0$

$\Rightarrow \quad T = e^{-n^2 t}$

$$u_n = X_n T_n = e^{-n^2 t} \cos nx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

och

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx$$

är en lösning.

Då $t = 0 \Rightarrow$

$$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

ska gälla!

(läs ex. sid. 141–147)

Ex. 6.2 $u_{xx} = u_t$ $\quad 0 < x < 2 \quad t > 0$

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= 2 \\ u(2,t) &= 5 \end{aligned}\right\} \quad t > 0$$

$u(x,0) = 1 - x^2 \quad 0 < x < 2$

Ersätt u med $v(x,t) + \varphi(x) \Rightarrow$

$$v_{xx} + \varphi'' = v_t$$

välj $\varphi'' = 0$, $\varphi(0) = 2$, $\varphi(2) = 5$

$\Rightarrow \varphi = \frac{3}{2}x + 2$ som ger

$$\begin{cases} v_{xx} = v_t \\ v(0,t) = v(2,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x) = \\ \quad = -x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$$

Nu kan vi lösa ekv som tidigare

Ex. 6.3 $u_t = u_{xx} + \sin(x/2)$ $\quad 0 < x < \pi$, $t > 0$

$u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \quad t > 0$

sätt $u := v + \varphi$

$\varphi'' = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$

Vad blir ekvationen för v?

ex. 6.4 $u_{xx} = u_{tt}$ Våg ekvationen

"Initialdata" ska ökas med en grad för t.

$$I_{1,2} : \begin{cases} u_t(x,0) = g(x) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

samt (B)

---

ex. 6.5 Laplace ekv. $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Övn. 6.8

Bestäm u:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & 0<x<1 \quad t>0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = \sin 3\pi x & \\ u_t(x,0) = \sin \pi x \cos^2 \pi x & 0<x<1 \end{cases}$$

Lös $u = XT$ leder som tidigare

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} T''(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

$\lambda = (n\pi)^2$ → se ex. 6.4

$T_n = a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t$

$X_n(x) = \sin(n\pi x)$

$n = 1, 2, \ldots$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) \right) \cdot \sin(n\pi x)$$ (12

I.D. ger $u(x,0) = \sin 3\pi x \Rightarrow$

$$\sum_{1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) = \sin 3\pi x$$

$$\Rightarrow a_3 = 1 \ ; \quad a_n = 0 \quad n \neq 3$$

I.D. $u_t(x,0) = \sin \pi x \cos^2 \pi x$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (n\pi) \cdot \sin(n\pi x) = \sin \pi x \cos^2 \pi x =$$

$$= \sin \pi x \left(\frac{1 + \cos 2\pi x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sin \pi x + \sin \pi x \cos 2\pi x \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \sin a \cos b = \\ = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \\ \sin(a+b)) \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left(\sin \pi x + \sin \pi x + \sin 3\pi x \right) =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2} \sin 3\pi x \quad \Rightarrow$$

$n = 1$: $\quad b_1 \pi = 1 \rightarrow b_1 = 1/\pi$

$n = 3$: $\quad b_3 \cdot 3\pi = 1/2 \rightarrow b_3 = 1/6\pi$

$n \neq 1, 3 \rightarrow b_n = 0 \quad \rightarrow$

13

$\rightarrow$ Losniya $\dot{a} = \{ a_3 = 1, \; a_n = 0 \quad \forall n \neq 3 \}$

$$u = \cos 3\pi t \sin 3\pi x + \frac{1}{\pi} \sin \pi t \sin \pi x +$$

$$+ \frac{1}{6\pi} \sin(3\pi t) \sin(3\pi x)$$

Prova $\quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad$ ok

$u(x,0) = \sin 3\pi x \quad$ ok

$u_t(x,0) = \sin \pi x \cos^2 \pi x \quad$ ok