Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Kontrollkrivning Del 1, 29/09/2008, Tid: 10.15-12.00

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Visa att

$$y_1 = x^{-1/2}, \qquad y_2 = x$$

bildar en mängd av fundamentallösningar till differentialekvationen

$$2x^2y'' + xy' - y = 0, \qquad x > 0.$$

2) Betrakta Eulers ekvation

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

nära punkten $x = 0$.
(a) Beskriv de 3 möjliga typerna av lösningar utifrån rötterna till ekvationen

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0.$$

(b) Härled villkoret F(r)=0 utifrån Eulers ekvation.

3) Lös initialvärdeproblemet

$$y^{(4)} - 16y = 0$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 4 \qquad y''(0) = 0 \qquad y'''(0) = 0,$$

då vi vet följande inversa Laplace transformer

$$L^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \sin at, \qquad L^{-1}\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right) = \sinh at.$$

Lycka till

Institutionen För Matematik
KTH

Lösningsförslag till Kontrollskrivning Del 1, 29/09/2008

1) Först ska man visa att lösningarna uppfyller ekvationen, genom att derivera och sätta in. Steg 2 blir att bestämma Wronskianen, se ex. 5 sidan 149 för ett liknande problem. Vi har

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = x^{-1/2} + (1/2)x^{1/2} > 0$$

då $x > 0$.

2) Se sats 5.5.1

3) Jfr exempel 2 sidan 320. Vi får ekvationen

$$s^4 Y - s^2 - 16Y = 0$$

som ger

$$Y = \frac{s^2}{s^4 - 16} = \frac{1/2}{s^2 + 4} + \frac{1/2}{s^2 - 4}$$

Svar:

$$\frac{\sin 2t + \sinh 2t}{4}$$