Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Kontrollkrivning SF1629 Diff & Trans
Del 1, 24/09/2009, Tid: 08.00-10.00

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För godkänt krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentligt med räkningar. TILLÅTNA HJÄLPMEDEL, ENBART BETA .

1a) För vilka konstanter a, b är funktionerna

$$y_1 = ax^{-1/2}, \qquad y_2 = b + x$$

lösningar till differentialekvationen

$$2x^2 y'' + xy' - y = 0, \qquad x > 0?$$

För dessa a, och b värden:
1b) Bestäm Wronskianen för y_1, y_2.
1c) Finns det andra lösningar y till ekvationen som inte ges på formen $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$?

2) Bestäm regulär-singulära punkterna, samt rötterna till motsvarande indexekvationen (indicial equation) till ekvationen

$$2t(t-1)y'' + (2+t)y' - (t-1)y = 0.$$

Hur ser lösningen till roten $r = 2$ för indicialekvationen ut?

3) Lös initialvärdesproblemet

$$y^{(4)} - 16y^{(2)} = 0$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0 \qquad y''(0) = 0 \qquad y'''(0) = 8.$$

Lycka till

Institutionen För Matematik
KTH

Lösningsförslag till Kontrollskrivning Del 1, 24/09/2009

1) Först an man visa att lösningarna uppfyller ekvationen, genom att derivera och sätta in. Detta ger att a är godtyckligt och $b = 0$. Steg 2 blir att bestämma Wronskianen, se ex. 5 sidan 149 för ett liknande problem. Vi har

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (3/2)x^{-1/2} > 0$$

då $x > 0$. Vidare inser vi från del (b) att det inte finns andra lösningar då dessa två är linjärt oberoende, och vi har enbart 2 lin. ober. lösningar (enligt sats i boken).

2) Se Exampel 1, sidan 288 i lroboken. Skriver vi $x = t - 1$ får vi denna ekvation

$$2x(x+1)y'' + (3+x)y' - xy = 0.$$

Alternativt löser vi problemet direkt med samma metod som exemplet i boken.

3) Metod 1: Sätt $z(t) = y''(t)$ och vi får ekvationen $y'' - 16y = 0$. Laplacetransformen av denna ekvation ger

$$s^2 Z - sz(0) - z'(0) - 16Z = 0$$

med värdena $z(0) = y''(0) = 0$ och $z'(0) = y'''(0) = 8$. Vi får d

$$s^2 Z - 8 - 16Z = 0$$

som ger

$$Z = \frac{8}{s^2 - 16} = \frac{-1}{s+4} + \frac{1}{s-4}$$

vars invers blir

$$y'' = z = -e^{-4t} + e^{4t}.$$

Man kan lösa ekvationen

$$y(t) = -e^{-4t}/16 + e^{4t}/16 + at + b,$$

Med initialvillkoren $y(0) = y'(0) = 0$ fr vi

$$-1/16 + 1/16 + b = 0, \qquad 1/4 + 1/4 + a = 0$$

som ger $a = -1/2$ och $b = 0$.

Svar:

$$y(t) = -t/2 - e^{-4t}/16 + e^{4t}/16 = \frac{1}{8}\sinh 4t - \frac{t}{2}.$$

Metod 2: Alternativt kan man lösa detta direkt utan att införa z.

Då får man efter Laplacetransformeringen att

$$s^4Y - 8 - 16s^2Y = 0$$

som leder till

$$Y = (1/16)\,[1/(s-4) - 1/(s-4)] - 1/(2s^2)$$

vilket ger samma svar som ovan.