Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

# Kontrollkrivning Del 2, 2009-11-25,
# Tid: 13.15-15.00

*Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För en godkänd skrivning krävs totalt 5 poäng. Alla svar ska motiveras ordentligt med räkningar. HJÄLPMEDEL: Enbart Beta.*

**1)** Bestäm Fourierserien för $|\cos(2t)|$, då $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

**2)** Bestäm en 2-periodisk lösning till differential-differensekvationen

$$y''(t) + y'(t+1) = \cos(2\pi t).$$

**3)** Betrakta funktionen $f$ som är deriverbar på intervallet $(-3, 0)$ med undantag i punkten $x = -1$, där den är diskontinuerlig, med $f(-1^+) = a$ och $f(-1^-) = b$ och att $f'(-1^\pm)$ existerar (dvs höger- och vänsterderivator existerar).
(a) Hur ska $f$ utvidgas för att den ska ha en Fourier-sinusserie i intervallet $(-3, 0)$?
(b) Skriv formeln för Fourier-sinus koefficienterna $b_n$ för alla $n$.
(c) Om $F(x)$ betecknar den utvidgade funktionens Fourier-sinusserie, vad är värdet $F(-1)$?

**Lycka Till**

Institutionen För Matematik
KTH

# Lösningsförslag till Kontrollskrivning Del 2, 2009-11-25

**1)** Funktionen är en jämn funktion, och därmed är $b_n = 0$. Dessutom funktionen $|\cos 2t|$ är $\pi/2$-periodisk på hela reella linjen (den är också $\pi$-periodisk). Därför räcker det att räkna F-serien på det mindre intervallet $(-\pi/4, \pi/4)$. För $a_n$ $(n \geq 1)$ gäller det att

$$a_n = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} |\cos 2t| \cos 4nt \; dt$$

$$a_n = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} |\cos 2t| \cos 4nt \; dt = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos(4n{+}2)t{+}\cos(4n{-}2)t \; dt =$$

$$\frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin(4n+2)t}{2(2n+1)} + \frac{\sin(4n-2)t}{2(2n-1)} \right) \Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin(n\pi + \pi/2)}{(2n+1)} + \frac{\sin(n\pi - \pi/2)}{(2n-1)} \right) =$$

$$\frac{2}{\pi} \left( \frac{(-1)^n}{(2n+1)} + \frac{(-1^n)}{(2n-1)} \right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Vi har även $a_0 = 4/\pi$. Serien blir

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos(2nt).$$

**2)** Låt

$$z(t) = y'(t)$$

så skrivs ekvationen

$$z'(t) + z(t+1) = \cos(2\pi t).$$

Sätt

$$z(t) = \sum_0^{\infty} c_n e^{i\pi nt}$$

och sätt in i ekvationen

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left(i\pi n + e^{i\pi n}\right) c_n e^{i\pi n t} = \frac{e^{2i\pi t} + e^{-2i\pi t}}{2}.$$

Efter koefficientidentifiering får vi

$$(2i\pi + e^{2i\pi})c_2 = 1/2 \qquad c_2 = \frac{1 - 2\pi i}{2(1 + 4\pi^2)}$$

$$(-2i\pi + e^{-2i\pi})c_{-2} = 1/2 \qquad c_{-2} = \frac{1 + 2\pi i}{2(1 + 4\pi^2)}.$$

Därmed är

$$z(t) = 2 \text{ Realdelen } \left(c_2 e^{2i\pi t}\right) = \frac{\cos(2\pi t) + 2\pi \sin(2\pi t))}{1 + 4\pi^2}.$$

Vidare har vi $y' = z$, och integration ger

$$y(t) = \frac{\sin(2\pi t) - 2\pi \cos(2\pi t))}{2\pi(1 + 4\pi^2)} + Const.\ .$$

**3)** (a) Funktionen ska utvidgas som en udda funktion

$$f(-x) = -f(x).$$

(b) Fourier sinuskoefficienten ges av

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} \tilde{f}(x) \sin(\pi n x/3) = \frac{2}{3}\int_{-3}^{0} f(x) \sin(\pi n x/3)\ ,$$

där $\tilde{f}$ är den utvidgade funktionen.
(c) $F(-1) = \frac{f(-1^+)+f(-1^-)}{2} = \frac{a+b}{2}$.