Institutionen för Matematik, **KTH**

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2008-12-19, kl. 08.00–13.00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Tentamen består av 7 uppgifter som ger totalt högst 36 poäng. Uppgifterna 1-6 ger högst 5 poäng vardera och uppgift 7 ger högst 6 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas.
Preliminära betygsgränser: A: 32- , B: 28-31, C: 25-27, D: 21-24, E: 18-20, FX: 16-17.

1) *Låt $f(t) = t^2$ då $|t| \leq \pi$ och en 2π-periodisk funtkion på hela reella linjen. Det gäller att $f(t)$ har Fourierserien* *(5p)*

$$F(t) := \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt).$$

(a) Motivera varför $F(t) = f(t)$? (2p)
(b) Bestäm Fourierserien G för f' (motivera). (1p)
(c) Vad är $G(\pi)$ (motivera)? (2p).

2) *Undersök om funktionssekvensen* *(5p)*

$$K_n(x) = \begin{cases} 3(n - n^3x^2) & |x| < 1/n \\ 0 & |x| \geq 1/n \end{cases}$$

är en positiv kärna (motivera ordentligt). Vad är värdet

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n'(x) f(x) dx,$$

där $K_n'(x) = dK_n/dx$ är derivatan, och f är en deriverbar funktion.

3) *Låt $g(t) = (1 - t^2)^{3/2}$. Bestäm konstanterna a, b, c så att* *(5p)*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|15\pi g(t) - 4(11 + at + bt^2 + ct^3)|^2}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

blir minimal.

4) *Bestäm en lösning i form av tempererade distribution till differentialekvationen* *(5p)*

$$f'' + f = \delta' \ .$$

5) *Bestäm Foriertransformen för funktionen* *(5p)*

$$f(t) = \frac{t}{t^2 - 2t + 5}.$$

(Det behövs inte några beräkningar, om man använder Beta samt egenskaper hos Fouriertransformen.)

6) *Bestäm en lösning till integralekvationen* *(5p)*

$$xe^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} 4(x-y)e^{-4(x-y)^2} f(y) dy \qquad -\infty < x < \infty.$$

7) *Lös modifierade vågekvationen* *(6p)*

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} - 2u_t = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \sin x + \sin 3x & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lycka till

Lösningsförslag SF1629, 2008-12-19, 08.00–13.00

1) *Definitionsområdet bör nog utökas till $[-\pi, \pi]$ för enkelhetsskul.*
(a) Enligt sats i boken, gäller det att F-serien konvergerar mot $f(t)$, om f är kontinuerlig samt F-serien är absolutkonvergent. Båda villkoren är uppfyllda.
(b) Fourierkoeffiecienterna för f och f' har sambandet $c_n(f) = inc_n(f')$ om f är deriverbar på $\mathbf{T}$ (förutom i $t = \pm\pi$) och därför gäller detta samband. Alltså

$$F'(t) := 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) = f'(t).$$

(c) Eftersom f' inte är deriverbar i $\pm\pi$ men den har höger och vänsterderivator så gäller enligt sats att

$$F'(\pi) = \frac{f'(\pi^+) + f'(\pi^-)}{2} = 0.$$

2) *De tre villkoren för positiva kärnor är $K_n \geq 0$, $\int_{-a}^{a} K_n = 1$, samt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|s|<a} K_n = 0, \qquad \forall \delta > 0.$$

Beräkning ger att två av dessa är uppfyllda men $\int_{-a}^{a} K_n = 4$. Därför enligt definition är den inte en kärna. Partiellintegration och det faktum att $K(\pm 1/n) = 0$ ger att integralen blir lika med

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n'(x) f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x) f'(x) dx = -4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_n(x)}{4} f'(x) dx \to -4f'(0),$$

då $K_n/4$ är en positiv kärna.

3) *Jämför Ex. 5.14 i textboken. Inreprodukten är relaterade till Chebyshevs polynom. Därmed motsvarande räkningar som i sidan 129 kan göras och man får*

$$a = c = 0, \quad b = -12.$$

4) *Vi kan ta Fouriertrnsform för båda leden och får*

$$-\omega \hat{f} + \hat{f} = i\omega$$

som ger

$$2\hat{f} = \frac{2i\omega}{1-\omega^2} = -\frac{i}{\omega - 1} - \frac{i}{\omega + 1}.$$

sätt nu $\hat{g}(\omega) = 2/i\omega$ då är

$$4\hat{f} = -\frac{2i}{\omega - 1} - \frac{2i}{\omega - 1} = -\mathcal{F}(e^{it} sgn(t)) - \mathcal{F}(e^{-it} sgn(t)) =$$

$$= -\mathcal{F}(2\cos t sgn(t)).$$

Dvs $f(t) = (\cos t sgn(t))/2$.

5) *Kvadrera nämnaren, och vi får*

$$f(t) = \frac{t}{(t-1)^2+2^2} = \frac{(t-1)}{(t-1)^2+2^2} + \frac{1}{(t-1)^2+2^2}.$$

Sätt $g(t) = t/(t^2+2^2)$ $h(t) = 1/(t^2+2^2)$ *för att få* $f(t) = g(t-1) + h(t-1)$*. Vi har*

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}_1 + \hat{h}_1(t) = e^{-\omega i}\hat{g}(\omega) + e^{-\omega i}\hat{h}(\omega) = -i\pi e^{-\omega i}e^{-2|\omega|}sgn(\omega)/2 + \pi e^{-\omega i}e^{-2|\omega|}/2.$$

6) *Vi kan integrera båda leden m.a.p.* x *för att få*

$$e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4(x-y)^2} f(y)dy \qquad -\infty < x < \infty.$$

Nu tar vi F-transform för båda leden (m.a.p. x *självklart!).*

$$\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_x(e^{-4(x-y)^2})f(y)dy.$$

Vi får

$$\mathcal{F}_x(e^{-4(x-y)^2}) = e^{-iy\omega}\mathcal{F}_x(e^{-4(x)^2}) = e^{-iy\omega}\sqrt{\frac{\pi}{4}}e^{-\omega^2/16}$$

som efter insättning ger

$$e^{-\omega^2/4} = \frac{1}{2}e^{-\omega^2/16}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\omega}f(y)dy$$

som förenklas till

$$2e^{-3\omega^2/16} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\omega}f(y)dy = \hat{f}(\omega).$$

Enligt Beta är då

$$f(t) = \frac{1}{3\pi}e^{-4t^2/3}.$$

7) *Varibelseparation leder till*

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(\pi) = 0$$

samt

$$T'' + 2T' - \lambda T = 0.$$

Initial data $T(0) = \sin x + \sin 3x$ *samt* $T'(0) = 0$ *får vänta!*

Vi löser dessa ekvationer för olika val av λ*:*
$\lambda \geq 0$ *inser man genast att det inte finns ngra lösningar som även satisfierar randavillkoren. För* $\lambda = -n^2 < 0$ *har vi* $X = A\cos nx + B\sin nx$ *som efter insättning av initialdata ger* $A = 0$ *och* B *fritt. För* T *får vi*

$$T'' + 2T' + n^2T = 0,$$

som ger lösningen

$$T(t) = e^{-t}(A_n\cos(\sqrt{n^2-1})t + B_n\sin(\sqrt{n^2-1})t) \qquad n > 1$$

och (pga dubbelrot $r_0 = -1$ för den karaktäristisa ekvationen får vi

$$T(t) = (a + bt)e^{-t}, \qquad \text{då } n = 1.$$

En lösning blir då

$$u(x,t) = (a + bt)e^{-t} sinx \sum_{n=2}^{\infty} \sin nxe^{-t}(A_n \cos(t\sqrt{n^2 - 1}) + B_n \sin(t\sqrt{n^2 - 1}).$$

Nu kan vi använda initialdata $u(x,0) = \sin x + \sin 3x$, samt $u_t(x,0) = 0$ givna i problemet.

$$0 = u(x,0) = a + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin nx = \sin x + \sin 3x$$

ger $A_n = 0$ då $n \neq 3$ och $A_3 = 1$ samt $a = 1$. Sätter vi in detta och använder andra villkoret för vi

$$0 = u_t(x,0) = b \sin x - \sin x - A_3 \sin 3x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin nx\sqrt{n^2 - 1},$$

som ger $b = 1$ $B_3 = 1/\sqrt{8}$, och $B_n = 0$ för övriga n. Lösningen blir alltså

$$u(x,t) = (1 + t)e^{-t} \sin x + \sin 3xe^{-t} \cos t\sqrt{8} + e^{-t} \sin 3x \frac{\sin t\sqrt{8}}{\sqrt{8}} \ .$$