Institutionen för Matematik, **KTH**

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629, 2009-01-08, kl. 14.00–19.00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Tentamen består av 6 uppgifter som ger totalt högst 19 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Preliminära betygsgränser: för betyg Fx krävs 8 poäng, för betyg E krävs 9 poäng, för betyg D krävs 11 poäng, för betyg C krävs 13 poäng, för betyg B krävs 15 poäng och för betyg A krävs 17 poäng.

1) Lös följande differentialekvation (3p)

$$xz' = z + 1 + \frac{1}{z+1}, \qquad z(1) = -3,$$

samt ange största intervall där lösningen existerar.

2) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen (3p)

$$t^3 z'' + t^2 z' - 4tz = \ln t\ .$$

(*Ledning*: För partikulärlösningen en lämplig variabelsubstitution $x = \log t$ förenklar räkningarna.)

3) Betrakta differentialekvationen (3p)

$$2\frac{\sin x^2}{\ln(x+1)} y'' + y' + y = 0.$$

a) Visa att punkten $x = 0$ är en reguljär singulär punkt?
b) Bestäm koefficienten framför termern $x^{3/2}$ i utvecklingen av serielösningen kring $x = 0$, för den största roten till indicialekvationen.

4) Bestäm lösningen till begynnelsevärdeproblemet (3p)

$$y'' + y' - 2y = e^{-t}(u_1(t) - u_2(t)), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

där $u_c(t) = 1$ för $t \geq c$ och $u_c(t) = 0$ för $t < c$ (translaterade Heaviside funktionen).

5) Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer (3p)

$$x' = 3x - 5y, \qquad y' = 2x - 3y.$$

6) Betrakta det autonoma systemet

$$x' = 1 + 2y - 2x^2, \qquad y' = 2x(x - 2y)$$

(a) Bestäm systemets kritiska punkter. (1p)
(b) Undersök dessa genom linearisering av systemet. För varje kritisk punkt ange typ av fasporträtt samt stabilitetsegenskaper. (3p)

Lycka till

Lösningsförslag SF1629, 2009-01-08, 14.00–19.00

1) Ekvationen kan lösas på olika sätt. Förslag: Skriv om ekvationen genom $y = z + 1$, och $y(1) = -2$

$$xy' = y + \frac{1}{y}$$

som kan skrivas om som $x(y^2)'/2 = y^2 + 1$, sätt $w = y^2$ och vi får $w'/(w + 1) = 2/x$ som ger lösningen $\log(w+1) = \log x^2 + c$ dvs $y^2 + 1 = c_1 x^2$ eller $y = \pm\sqrt{c_1 x^2 - 1}$. Initialvärdet ger nu $-2 = \pm\sqrt{c_1 - 1}$, dvs vi måste välja minustecknet samt $c_1 = 5$. Svar blir då

$$y = -\sqrt{5x^2 - 1}, \qquad z = -1 - \sqrt{5x^2 - 1}.$$

Definitionsintervallet blir då $(1/\sqrt{5}, +\infty)$.

2) Gör en variabelbyte $x = \log t$ för att få en ny ekvation:

$$y(x) = y(\log t) = z(t),$$

som ger $z' = y'/t$, $z'' = (-y' + y'')/t^2$ och efter insättning får vi

$$y'' - 4y = xe^{-x}.$$

Den homogena ekvationen har lösningen $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$. Den partikulära lösningen kan fås genom ansatsen $y = u(x)e^{-x}$ som leder till

$$u'' - 2u' - 3u = x,$$

som löses enkelt med antaganden $u = ax + b$ och insättning ger $a = -1/3$, $b = 2/9$, dvs

$$y = (-x/3 + 2/9)e^{-x}.$$

Alltså

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + (-x/3 + 2/9)e^{-x}$$

som i t-variabel ger

$$c_1 t^2 + c_2 t^{-2} + (-\ln t/3 + 2/9)/t.$$

3) Jämför sidorna 286-289 i boken. Vi har $P(x) = \frac{2\sin x^2}{\ln(x+1)}$, $Q(x) = 1$, $R(x) = 1$ (se ekvation (11)-(14) sidan 288. Därmed kan vi beräkna $p_0 = \lim_{x\to 0} xQ(x)/P(x) = \lim_{x\to 0} x\ln(x + 1)/2\sin x^2 = 1/2$, samt $q_0 = \lim_{x\to 0} Q(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \ln(x + 1)/2\sin x^2 = 0$. Vi ser gränsvärden p_0 och q_0 exiterar. Därför är $x = 0$ en rregular singulär punkt.

Vidare har vi att indicialekvationen är $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ och med dessa värden $p_0 = 1/2, q_0 = 0$ får vi $r_1 = 0, r_2 = 1/2$. Skriv om ekvationen till

$$2\sin x^2 y'' + \ln(x + 1)y' + \ln(x + 1)y = 0.$$

Vi gör ansatsen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2},$$

och får

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)a_n x^{n-1/2} = (a_0/2)x^{-1/2} + (3/2)a_1 x^{1/2} + O(x^{3/2}),$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)(n-1/2)a_n x^{n-3/2} = -(a_0/4)x^{-3/2} + (3/4)a_1 x^{-1/2} + 1O(x^{1/2}),$$

samt

$$\sin x^2 = x^2 + O(x^4), \qquad \ln(x+1) = x + O(x^2).$$

Insättning i ekvationen ger

$$2[x^2 + O(x^4)][-a_0/4x^{-3/2} + (3/4)a_1 x^{-1/2} + O(x^{1/2})] +$$

$$[x + O(x^2)][(a_0/2)x^{-1/2} + (3/2)a_1 x^{1/2} + O(x^{3/2})] + [x + O(x^2)][a_0 x^{1/2} + O(x^{3/2})] = 0$$

$$(3a_1 + a_0)x^{3/2} + O(x^{5/2}) = 0,$$

dvs $a_1 = -a_0/3$ och a_0 kan väljas fritt. Valet blir då

$$a_0(1 - (1/3)x^{3/2} + \text{högre termer}).$$

4) Laplacetransformen av ekvationen leder till

$$(s^2 + s - 2)Y - 1 = \mathcal{L}\left(e^{-t}(H(t-1) - H(t-2))\right)$$

eller

$$(s^2 + s - 2)Y - 1 = \int_1^2 e^{-t}e^{-ts}dt = \frac{-1}{s+1}\left(e^{-2s-2} + e^{-s-1}\right).$$

$$Y = \frac{1}{(s-1)(s+2)} - \frac{e^{-2s-2} + e^{-s-1}}{(s-1)(s+2)(s+1)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1/3}{(s-1)} + \frac{-1/3}{(s+2)}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+1)} = \frac{1/6}{(s-1)} + \frac{-1/2}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+2)}$$

$$Y = \frac{1/3}{(s-1)} + \frac{-1/3}{(s+2)} - \left(e^{-2s-2} + e^{-s-1}\right)\left(\frac{1/6}{(s-1)} + \frac{-1/2}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+2)}\right)$$

Tar vi inversen får vi

$$y = e^t/3 - e^{-2t}/3 - e^{-2}u_2(t)\left(e^{t-2}/6 - e^{2-t}/2 + e^{-2(t-2)}/3\right)$$
$$+e^{-1}u_1(t)\left(e^{t-1}/6 - e^{1-t}/2 + e^{-2(t-1)}/3\right).$$

5) Ekvationen i matrisform är $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = (x, y).$$

Matrisen A har två egenvärden $\lambda_{1,2} = \pm i$, Egenvektor till $\lambda = i$ är $\xi = (5, 3 - i)$, som ger lösningen $\mathbf{x} = \xi e^{it}$ vars real och imaginär del blir

$$\mathbf{x}^1 = (5\cos t, 3\cos t + \sin t), \qquad \mathbf{x}^2 = (5\sin t, 3\sin t - \cos 2t).$$

Den allmänna lösningen blir

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

6) Kritiska punkterna fås genom

$$1 + 2y - 2x^2 = 0, \qquad 2x(x - 2y) = 0$$

som ger

$$(0, -1/2), \qquad (1, 1/2) \qquad (-1/2, -1/4).$$

Jakobimatrisen till den linjäriserade ekvationen blir då

$$\begin{pmatrix} -4x & 2 \\ 8x - 4y & -4x \end{pmatrix}.$$

Vi gör insättning av kritiska punkter och bestämmer motsvarande matrisens egenvärden som blir då

$$(0, -1/2): \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ger $\lambda_{1,2} = \pm 2$, dvs sadel punkt och instabil. För

$$(1, 1/2): \qquad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

ger $\lambda_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{3} < 0$ dvs stabil nod. För

$$(-1/2, -1/4): \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

som ger $\lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{6}$, dvs en instabil spiral.