

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2009-06-09, kl. 08.00–13.00

Hjälpmedel: *BETA, Mathematics Handbook.*

Tentamen består av 7 uppgifter som ger totalt högst 36 poäng. Uppgifterna 1-6 ger högst 5 poäng vardera och uppgift 7 ger högst 6 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Preliminära betygsgränser: A: 32- , B: 28-31, C: 25-27, D: 21-24, E: 18-20, FX: 16-17.

1) Beräkna exakta värdet av (5p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1},$$

genom att använda Fourier-cosinusserien för funktionen $\sin x$ över ett lämpligt intervall.

2) Beräkna gränsvärdet (5p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/n}^{1/n} n f(x) (1 - |nx|)^2 dx,$$

der f är en kontinuerlig funktion.

3) Låt $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Visa att $f * f$ är i $L^2(\mathbf{R})$. (5p)

4) Given differentialekvationen

$$t^2 u'' + 3tu' + \lambda u = 0, \quad 1 < t < e, \quad u(1) = 0 \quad u(e) = 0.$$

(a) Skriv om ekvationen så att en symmetrisk operator A kan associeras till ekvationen i ett lämpligt $L^2_w(1, e)$ rum (i enlighet med Sturm-Liouilles sats). (2p)

(b) Bestäm egenvärden och egenfunktioner till ekvationen. (Ekvationen är av Eulertyp.) (3p)

5) Låt u vara en lösning till värmeledningsekvationen (5p)

$$u_{xx} - u_t = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

där $f \in L^1(\mathbf{R})$. Låt vidare

$$E(x, t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Visa att $u = E(x, t) * f(x)$

6) Bestäm en funktion g sådan att (5p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(\frac{e^{|x|-|x-y|}}{1+|x|} \right) dy = 1 \quad -\infty < x < \infty.$$

7) Visa att för alla positiva heltal n gäller det att (6p)

$$g\delta^{(n)} \equiv 0$$

där $\delta^{(n)}$ är n -te derivatan av Diracs deltafunktion i origo och $g(x) = e^{-1/x^2}$ då $x \neq 0$ och $g(0) = 0$.

Lycka till

Lösningförslag SF1629, 2008-12-19, 08.00–13.00

1) För att få F -cos serien måste vi ha en jämn funktion. Därför definerar vi $f(x) = |\sin x|$. Enligt Beta, s. 310 gäller det att

$$|\sin x| = F(x) := \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx).$$

Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig gäller det att $f(0) = 0 = F(0)$, dvs F -serien har samma värde som funktionen i punkten 0. Därmed

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

som ger

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

2) Låt $U_n(x) = n(1 - |nx|)^2$ på intervallet $(-1/n, 1/n)$ och $U_n = 0$ för övrigt.

De tre villkoren för positiva kärnor är $U_n \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} U_n = 1$, samt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |s| < a} U_n = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Beräkning ger att två av dessa är uppfyllda men $\int_{-\infty}^{\infty} U_n = 2/3$. Därför r funktionen $K_n = 3U_n/2$ en positiv kärna. Således gäller det att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/n}^{1/n} U_n(x) f(x) dx = (2/3) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/n}^{1/n} K_n(x) f(x) dx = 2f(0)/3.$$

3) Sätt $F = f * f$. Då gäller det att $F \in L^1(\mathbf{R})$ (enligt boken sidan 177, men utan bevis). Observera att man behver detta L^1 egenskap fr att kunna ge definition t faltningen (konvoution). Fourier-transformen ger $\hat{F}(\omega) = \hat{f}^2(\omega) = \pi^2 e^{-|\omega|}$ som tillhör $L^2(\mathbf{R})$. Enligt Plancherels formel

$$\int |\hat{F}(\omega)|^2 = \int |F(t)|^2,$$

dvs även F tillhör L^2 .

4a) Skriv om ekvationen som självdjungerande form (se sidorna 153-158 i textboken):

$$(t^3 y')' + \lambda t y = 0, \quad \text{över } [1, e].$$

Viktfunktionen blir $w(t) = t$ (se exempelvis ekvation (E) sidan 155). Definera en operator A genom

$$Au = -\frac{1}{t}(t^3 u')' \quad \forall u \in D(A),$$

där $D(A) = \{u \in C^2[1, e] : u(0) = 0, u(e) = 0\}$. Vi kan visa att operatorn A är symmetrisk genom att göra successiv partiellintegration och använda randdata

$$\langle Au, v \rangle = - \int_1^e \frac{1}{t} (t^3 u')' \bar{v} w = \{w \text{ är vikten} = t\}$$

$$= \{ \text{integration och användandet av randvärden ger} \} = - \int_1^e \left(\frac{3}{t} u' \right) \bar{v}' = \dots = \langle u, Av \rangle$$

4b) Ekvationen är av Euler typ och därför kan vi använda variabelsubstitutionen $t = e^x$ och få

$$u''(x) + 2u'(x) + \lambda u(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Detta ger en karakteristisk ekvation $r^2 + 2r + \lambda = 0$ som har lösningen $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$. Flera möjligheter för λ uppstår: $\lambda \leq 1$ ger inga lösningar med avseende på randdata. För $\lambda > 1$ får vi $\lambda = 1 - n^2\pi^2$ med $n = 1, 2, \dots$ och egenfunktionerna

$$u_n(x) = e^{-x} \sin(n\pi x),$$

som efter insättning av variabeln $t = e^x$ ger

$$u_n(t) = \frac{1}{t} \sin(n\pi \ln t)$$

för $n \geq 1$.

5) Se textboken (Vretblad, sidan 182-183), eller ta Fouriertransformationen för högervänsterleden i både värmeledningsekvationen samt uttrycket för u , $u = E * f$, sen lös den enkla ekvationen.

6) Vi kan skriva om ekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-|x-y|} dy = (1 + |x|) e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty,$$

dvs

$$g(x) * e^{-|x|} = (1 + |x|) e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty,$$

Vi tar F-transform för båda leden (m.a.p. x).

$$\hat{g}\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \mathcal{F}\left((1 + |x|)e^{-|x|}\right)$$

Vi får

$$\hat{f} \frac{2}{1 + \omega^2} = \frac{2}{1 + \omega^2} + \frac{2(1 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^2}$$

som förenklas till

$$\hat{f} = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

Enligt Beta är då

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

7) Låt φ vara en C^∞ funktion tillhörande Schwartzklassen. Då gäller det att

$$\left(g\delta^{(n)} \right) [\varphi] = (-1)^n \delta[D^n(g\varphi)].$$

Man får enligt Leibniz formell

$$D^n(g\varphi) = \sum_j^n \frac{n!}{j!(n-j)!} D^j g \varphi^{(n-j)}$$

och därför

$$(g\delta^{(n)})[\varphi] = (-1)^n \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} D^j g(0) \varphi^{(n-j)}(0).$$

Varje derivata $h(x) := D^j e^{-1/x^2}$ innehåller termer av typ $h_k := e^{-1/x^2}/x^k$ där $k \leq 2j$ (eller enligt tal). Man får att $\lim_{x \rightarrow 0} h_k(x) = 0$ dvs $h(0) = 0$. Detta innebär att $g^j(0) = 0$ för alla ordningens derivator j .

Alltså $g\delta^{(n)} \equiv 0$.