Institutionen för Matematik, **KTH**

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629, 2009-10-21, kl. 08.00–13.00

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Tentamen består av 6 uppgifter som ger totalt högst 19 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Preliminära betygsgränser: för betyg Fx krävs 8 poäng, för betyg E krävs 9 poäng, för betyg D krävs 11 poäng, för betyg C krävs 13 poäng, för betyg B krävs 15 poäng och för betyg A krävs 17 poäng.

1) Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen **(3p)**

$$z'' + 4z' + 4z = x^{3/2}e^{-2x}, \qquad x > 0 \ .$$

2) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen **(3p)**

$$y' = -ty + ty^2 \ .$$

3) Betrakta differentialekvationen **(3p)**

$$2x^2y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0 \ .$$

a) Visa att $x = 0$ är en reguljär-singulär punkt, samt bestäm största roten till indexekvationen (indicial) kring $x = 0$. **(1p)**

b) Bestäm koefficienten framför termerna $x^{1/2}, x^{3/2}, x^{5/2},\ x^{7/2}$ i utvecklingen av serielösningen kring $x = 0$, för den största roten till indicialekvationen. **(2p)**

4) Använd Laplacetransformen för att lösa integro-differentialekvationen **(3p)**

$$y'(t) = -y(t) + \int_0^t \sin(t-s)y(s)ds, \qquad y(0) = 1.$$

5) Tre vattentankar T_i $(i = 1, 2, 3)$ innehållande saltlösning är kopplade till varandra genom att saltlösningen rinner från T_1 till T_2, från T_2 till T_3 och sedan från T_3 tillbaka till T_1. Hastigheten för alla dessa flöden är r liter/min.

a) Anta att det initialt (vid tiden $t = 0$) finns V_i liter saltlösning i tank T_i. Skriv ett differentialekvationssystem som beskriver mängden salt $x_i(t)$ i gram vid tiden t i tank T_i. **(1p)**

b) Anta att **(2p)**

$$V_1 = 50, \quad V_2 = 25, \quad V_3 = 50, \quad r = 10,$$

samt att den totala mängden salt i systemet är 50 gram. Bestäm gränsvärdet för mängden salt i varje tank då $t \to \infty$.

6) Betrakta det autonoma systemet $\overline{x}' = A\overline{x}$, där $A = (a_{ij}(x, y))$ är en 2×2 matris. Låt vidare **(4p)**

$$a_{11} = a(y), \qquad a_{12} = b(y), \qquad a_{21} = c(x), \qquad a_{22} = d(x)$$

där a, b, c, d är kontinuerliga funktioner. Ange allmänna villkor för funktionerna a, b, c, d som garanterar att systemet inte har några periodiska lösningar förutom origo.

Lycka till

Lösningsförslag SF1629, 2009-10-21, 08.00–13.00

1) Ansatsen $y = ue^{-2x}$ och insättning i ekvationen ger $u'' = x^{3/2}$, som har lösningen $u = 4x^{7/2}/35 + ax + b$. Vi kan at $a = b = 0$, eftersom vi vill ha en partikulärlösning. Svar:

$$y_p = \frac{4}{35}\, x^{7/2}\, e^{-2x}\ .$$

2) Funktionen $y = 0$ är en lösning. Ekvationen kan skrivas som $y' = f(x, y)$ där $f(x, y) = xy^2 - xy$ är en kontinuerlig funktion samt deriverbar i y (och även i x). Existens- och entydighetsatsen ger att det finns bara en lösning till intitialvärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Eftersom $y \equiv 0$ är en lösning, så kommer det inte finnas andra lösningar som kan ha värdet $y(t_0) = 0$ för något t_0. Dvs lösningskurvan $(x(t), y(t))$ kan inte skära y-axeln.

Detta innbär att vi kan göra substitutionen $v = 1/y$. Den givna ekvationen övergår då i

$$v' = xv - x = x(v - 1)$$

eller

$$\frac{dv}{v - 1} = xdx$$

som leder till lösningen $\log |v - 1| = x^2/2 + C$ som i sin tur ger

$$v = 1 \pm C_0 e^{x^2/2}, \qquad (C_0 \geq 0)$$

Övriga lösningar blir då

$$y = \frac{1}{1 + C_1 e^{x^2/2}} \qquad (-\infty < C_1 < \infty).$$

3) Vi kan räkna gränsvärden

$$\lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(3x)}{2x^2} = 3/2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 R(x)(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2(x^2 + 1)}{2x^2} = -1/2$$

som visar att 0 är en regulär-singulär punkt. Indexekvationen blir då

$$r(r - 1) + 3r/2 - 1/2 = 0$$

som har rötterna $r_1 = 1/2$ och $r_2 = -1$. Enligt sats i boken så finns det två linjärt oberoende lösningar, då dessa rötters differens inte är ett heltal. Substitutionen

$$y = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

med dess derivator y', y'' leder till

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)(n+1/2-1)a_n x^{n+1/2} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)a_n x^{n+1/2} -$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+1/2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2}x^{n+1/2}.$$

Vi får att

$$2(1/2)(1/2-1) + 3(1/2) - 1)a_0 = 0$$

dvs a_0 blir en obestämd konstant. För a_1 får vi

$$(2(1/2)^2 + 5(1/2) + 2)a_1 = 0$$

dvs $a_1 = 0$. För de övriga har vi

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{2(n+1/2)^2 + (n+1/2) - 1} = \frac{a_{n-2}}{2n^2 + 3n}, \qquad n \geq 2.$$

Termen $x^{1/2}$ ges av $n = 0$, a_0 (fri konstant).

Termen $x^{5/2}$ ges av $n = 2$, $a_2 = a_0/(2(2^2) + 6) = a_0/14$. Termerna $x^{3/2}, x^{7/2}$ har koeffiecienten lika med 0, då de ges i termer av a_1.

4) Observera att

$$\int_0^t \sin(t-s)y(s)ds = (\sin t * y(t))(s).$$

Laplacetransformera båda sidorna

$$sY(s) - y(0) = -Y(s) + L(\sin t)(s)Y(s) = Y(s)(-1 + 1/(s^2+1)) = Y(s)(-s^2/(s^2+1)).$$

Då $y(0) = 1$ får vi

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1/2)^2 + 3/4}$$

Alltså

$$y(t) = 1 - e^{-t/2}(2/\sqrt{3})\sin(t\sqrt{3}/2).$$

5a) Ekvationssystemet som modellerar detta problem är

$$x_1' = -k_1x_1 + k_3x_3, \quad x_2' = k_1x_1 - k_2x_2, \quad x_3' = k_2x_2 - k_3x_3,$$

där $k_i = r/V_i$, $i = 1, 2, 3$.

5a) Systemet kan lösas med dessa värden V_i och vi får egenvärdena $r_1 = 0, r_{2,3} = -0.4 \pm (0.2)i$. Dessa ger egenvektorerna

$$\mathbf{x_1}(t) = (2, 1, 2)$$

$$\mathbf{x_2}(t) = e^{-0.4t}(\cos 0.2t, \sin 0.2t, -\cos 0.2t - \sin 0.2t)$$

$$\mathbf{x_3}(t) = e^{-0.4t}(-\sin 0.2t, \cos 0.2t, -\cos 0.2t + \sin 0.2t).$$

Allmänna lösningen blir då

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x_1}(t) + c_2\mathbf{x_2}(t) + c_3\mathbf{x_3}(t)$$

som ger mängden salt i varje tank vid tiden t. Vi har också

$$\mathbf{x_1}(t) + \mathbf{x_2}(t) + \mathbf{x_3}(t) = \text{totala mängden salt} = 50$$

då systemet är slutet och den totala mämgden salt inte ändras.

När $t \to \infty$ får vi att

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = c_1(2, 1, 2)$$

med $2c_1 + c_1 + 2c_1 = 50$. Dvs $c_1 = 10$ och vi har

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = (20, 10, 20).$$

6) Vi har

$$x' = F(x, y) = a(y)x + b(y)y, \qquad y' = G(x, y) = c(x)x + d(x)y.$$

Enligt sats i boken räcker det att villkoret $F_x + G_y \neq 0$ är uppfyllt. Dvs $a(y) + d(x) \neq 0$ räcker för att garantera att det inte finns några periodiska lösningar.