Institutionen för Matematik, **KTH**

# TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2009-12-18, kl. 08.00–13.00

*Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.*
*Tentamen består av 7 uppgifter som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Uppgifterna 1-6 ger högst 5 poäng vardera och uppgift 7 ger högst 6 poäng. Preliminära betygsgränser: A: 32- , B: 28-31, C: 25-27, D: 21-24, E: 18-20, FX: 16-17.*

**1)** Låt $f(x) = \sin^2 x$ på intervallet $(-\pi, 0)$.
**a)** Bestäm en Fourier-cosinusserie för $f$ över detta intervall. (1p)
**b)** Bestäm en Fourier-sinusserie för $f$ över detta intervall. (4p)

**2)** Beräkna gränsvärdet (5p)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{n\sin(y/n)}{y}(1-|y|)^2 dy.$$

Alla uträkningar ska motiveras.

**3)** Låt $H_n = (-1)^n e^{x^2} D^n(e^{-x^2})$ $(n = 0, 1, \cdots)$ vara Hermite-polynomen (se i Beta). Visa (genom detaljerad uträkning) ortogonalitetsrelationen (5p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n \, dx = (n!)2^n \sqrt{\pi}\delta_{m,n}.$$

**4)** Bestäm alla $2\pi$-periodiska lösningar till egenvärdesproblemet (5p)

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0.$$

**5)** Låt $u$ vara en begränsad lösning till Dirichlet-problemet i övre halvplanet $\{y > 0\}$ (5p)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u(x, 0) = f(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

där $f \in L^1(\mathbf{R})$. Låt vidare

$$P(x, y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Visa att $u = P(x, y) * f(x)$.

**6)** Given är en talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, med $a_0 = 2$, $a_1 = 7$, samt (5p)

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0, \qquad n = 0, 1, \cdots$$

Bestäm $a_n$.

**7a)** Låt $f(x) = (|x|^k + 1)\log|x|$ där $k$ är ett godtyckligt givet positiv tal. Visa att $f$ definierar en distribution genom (3p)

$$T_f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) \, dx.$$

**7b)** Låt $g$ vara en tempererad distribution, med egenskapen (3p)

$$x^2(g' + g) = 0.$$

Bestäm $g$ i exakt form. All uträkning ska motiveras i detalj.

**Lycka till**

# Lösningsförslag SF1629, 2009-12-18, 08.00–13.00

**1a)** Vi utvidgar funktionen som en udda funktion över hela intervallet $(-\pi, \pi)$. Vi skriver även om $2\sin^2 x = \cos 2x - 1$, och har därmed F-cosinusserien för funktionen

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

**1b)** För att få F-sinserien måste vi ha en udda funktion över intervallet $(-\pi, \pi)$. Därför utvidgar vi $f$ som en udda funtktion $f(x) = -\sin^2 x$ över $(0, \pi)$. Fourier-sinus koefficienterna kan beräknas (anta $n \neq 2$)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin nx \sin^2 x dx = \{\text{Part.Integ.}\} = \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx(2\sin x \cos x) dx = \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx \sin 2x$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\frac{\cos(2-n)x}{2(2-n)} - \frac{\cos(2+n)x}{2(2+n)})$$

$$\frac{4}{n\pi}\frac{1}{4-n^2}(-1+(-1)^n).$$

Man kan också få att

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin 2x \sin^2 x dx = 0.$$

Därmed är $b_n = 0$ för jämna tal $n$, och

$$\sin^2(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)(-4+(2m+1)^2)} \sin((2m+1)x).$$

**2)** Vi kan skriva om integralen med variabelsubstitution och vi får

$$\int_{-1}^{1} \frac{n\sin(y/n)}{y}(1-|y|)^2 dy = \int_{-1/n}^{1/n} \frac{\sin(x)}{x} n(1-|nx|)^2 dx.$$

Låt $U_n(x) = n(1-|nx|)^2$ på inervallet $(-1/n, 1/n)$ och $U_n = 0$ för övrigt. De tre villkoren för positiva kärnor är $U_n \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} U_n = 1$, samt

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta<|s|<a} U_n = 0, \qquad \forall\delta > 0.$$

Beräkning ger att två av dessa är uppfyllda men $\int_{-\infty}^{\infty} U_n = 2/3$. Därför är funktionen $K_n = 3U_n/2$ en positiv kärna. Således gäller det att

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1/n}^{1/n} U_n(x) f(x) dx = (2/3)\lim_{n\to\infty}\int_{-1/n}^{1/n} K_n(x) f(x) dx = 2f(0)/3 = 2/3,$$

då $f(x) = \sin x/x$, och $f(0) = 1$.

**3) Metod 1:** Använd Rodrigues formel: $H_n = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}$, och partielintegration

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2}\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} D^n(e^{-x^2}) H_m\, dx = (-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty} D^{n-1}(e^{-x^2}) H'_m\, dx$$

Nu kan vi använda $H'_m = 2mH_{m-1}$ och får

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2}\, dx = 2m(-1)^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty} D^{n-1}(e^{-x^2}) H_{m-1}\, dx = 2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}H_{m-1}e^{-x^2}\, dx.$$

Låt nu $n > m$ och iterera detta $m$-gånger

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2}\ dx = 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-m} H_0 e^{-x^2}\ dx = 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-m} e^{-x^2}\ dx =$$

$$2^m m! (-1)^{n-m} \int_{-\infty}^{\infty} D^{n-m}(e^{-x^2})\ dx = 0.$$

Om $n = m$ så blir detta

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_n e^{-x^2}\ dx = 2^n n! (-1)^{n-n} \int_{-\infty}^{\infty} D^{n-n}(e^{-x^2})\ dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

**Metod 2:** Skriv om differentialekvationen $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, som $(e^{-x^2} y')' + 2ne^{-x^2} y = 0$, och sätt $L(y) := (e^{-x^2} y')'$, vilket är dess självadjungerade form. Vi får

$$2n \int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2n H_n H_m e^{-x^2}\ dx = -\int_{-\infty}^{\infty} L(H_n) H_m\ dx = -\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2} H_n')' H_m\ dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x^2} H_n') H_m'\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n (e^{-x^2} H_m')'\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n 2m H_m e^{-x^2}\ dx = 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2}\ dx$$

Dvs $m = n$, eller

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2}\ dx = 0.$$

Alltså

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n\ dx\ dx = C_{n,m} \delta_{m,n}.$$

För normen, använd partielintegration som ovan samt $H_n' = 2nH_{n-1}$ samt en itertaion till $H_0$

$$C_{n,n} =< H_n, H_n >= 2n < H_{n-1}, H_{n-1} >= ... = 2^n n! < H_0, H_0 > 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

**4)** Ekvationen

$$y'' + \lambda y = 0$$

har följande lösningar:
$\lambda = 0$: $y = At + B$. Periodisk randdata ger $A = 0$. Alltså $y = B$.

$\lambda = -a^2 < 0$: $y = Ae^{at} + Be^{-at}$. $2\pi$-periodisk randdata ger $y(-\pi) = y(\pi)$ som leder till $A = B$. Vidare har vi $y(2\pi) = y(0)$ pga periodicitet, som ger $2 = (e^{2\pi a} + e^{-2\pi a})$. Detta kan lösas enbart för $a = 0$. Dvs $A = B = 0$ och vi har ingen lösning, föutom noll-funktionen.

$\lambda = a^2 < 0$: $y = A\cos at + B\sin at$. Periodisk randdata ger $y(\pi) = y(-\pi)$, som leder till $A\cos a\pi + B\sin a\pi = A\cos a\pi - B\sin a\pi$. Dvs $\sin a\pi = 0$. Detta ger $a = n$. Dvs $y(t) = A\cos nt + B\sin nt$ är en periodisk lösning för alla $n = 1, 2, \cdots$

Svar: $y(t) = A\cos nt + B\sin nt$ där $n = 0, 1, 2, \cdots$. (Observera att konstanta funktionen fås då $n = 0$).

**5)** Se textboken (Vretblad, sidan 185-186), eller Fouriertransformera höger-vänsterleden i både sekvationen samt uttrycket för $u$, $u = P * f$, sen lös den enkla ekvationen.

**6)** Använd $Z$-transformen. Låt $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$. Vi har då

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^{-n} + 7 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{-n} + 10 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = 0.$$

En omskrivning leder till

$$z^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} - 2z^2 - 7z + 7(z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} - 2z) + 10\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = 0.$$

Dvs

$$z^2A(z) + 7zA(z) + 10A(z) = 2z^2 - 7z.$$

$$A(z) = \frac{z(2z-7)}{(z-2)(z-5)} = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-5} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n+5^n)z^{-n}.$$

Alltså

$$a_n = 2^n + 5^n.$$

**7a)** Att $T_f$ definierar en linjär avbildning från $S$ till $\mathbf{C}$ är självklart.Vi ska visa att $T_f$ är kontinuerlig. Låt $\phi_j \to \phi$. Då gäller det att

$$T_f[\phi_j - \phi] = \int_{|x|<1} (|x|^k + 1)\log|x||\phi_j - \phi|\,dx + \int_{|x|>1} (|x|^k + 1)\log|x||\phi_j - \phi|\,dx = I_1 + I_2.$$

Vi har

$$I_1 \le \left(\max_{|x|<1}|\phi_j - \phi|\right)\int_{|x|<1}(|x|^k+1)\log|x|\,dx \le C\max_{|x|<1}|\phi_j-\phi|\,dx \quad \to \quad 0.$$

$$I_2 \le \left(\max_{|x|>1}(|x|^{k+2}|\phi_j - \phi|)\right)\int_{|x|>1}\frac{\log|x|}{x^2}\,dx \le C\left(\max_{|x|>1}(|x|^{k+2}|\phi_j-\phi|)\right).$$

Välj nu ett $\epsilon > 0$, då har vi att

$$I_2 \le C\left(\max_{|x|>1}(|x|^{k+2}|\phi_j-\phi|)\right) \le C\left(\max_{1<|x|<1/\epsilon}(|x|^{k+2}|\phi_j-\phi|)\right) + C\left(\max_{|x|>1/\epsilon}(|x|^{k+2}|\phi_j-\phi|)\right) = I_2' + I_2''.$$

Vi ser $I_2' < \frac{C}{\epsilon^{k+2}}\max_{|x|>1/\epsilon}|\phi_j| + |\phi|$ och eftersom $\phi_j$ och $\phi$ tillhör Schwartz klassen, så har vi att $|\phi_j| + |\phi| \le C_k|x|^{-k-3}$, dvs $I_2' < \frac{C}{\epsilon^{k+2}}\max_{|x|>1/\epsilon}|\phi_j| + |\phi| < CC_k\epsilon^{-1}$.

För $I_2'$ har vi

$$I_2' < \frac{C}{\epsilon^{k+2}}\max_{1<|x|<1/\epsilon}|\phi_j - \phi| \quad \to \quad 0$$

då $j \to \infty$. $I_2 \to 0$ då $j \to \infty$. Här har vi använt oss av att $\varphi_j, \varphi$ tillhör Schwartz klassen.

**7b)** Sätt $h := (g' + g)$. Eftersom $x^2h = 0$ så gäller det att $0 = \mathcal{F}(x^2h) = -\hat{h}''$. Enligt sats i boken (Sats 8.1) $\hat{h}' = const.$ och på samma sätt har vi $\hat{h} = c_1\omega + c_0$. Vidare har vi $\hat{h} = i\omega\hat{g} + \hat{g}$. Dvs

$$\hat{g} = \frac{c_1\omega + c_0}{1 + i\omega}.$$

Detta kan inverstransformeras coh vi får

$$g(x) = C_1\delta_0 + C_2e^{-x}H(x),$$

där $H(x)$ är Heaviside funktionen, och $C_1, C_2$ godtyckliga konstanter.