

TENTAMENSSKRIVNING

SF1629 Del 2, 2010-06-08, kl. 08.00–13.00

Hjälpmedel: *BETA, Mathematics Handbook.*

Tentamen består av 7 uppgifter som ger totalt högst 36 poäng. Tentamenspoäng och bonuspoäng adderas. Uppgifterna 1-6 ger högst 5 poäng vardera och uppgift 7 ger högst 6 poäng. Preliminära betygsgränser: A: 32-, B: 28-31, C: 25-27, D: 21-24, E: 18-20, FX: 16-17.

1) Låt $f(x) = \cos^2 x$ på intervallet $(-\pi, 0)$.

a) Bestäm en Fourier-cosinusserie för f över detta intervall. (1p)

b) Bestäm en Fourier-sinusserie för f över detta intervall. (4p)

2) Bestäm konstanten C sådan att funktionen (5p)

$$K_n(x) = nC \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad \text{då} \quad \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}; \quad K_n(x) = 0 \quad \text{då} \quad |x| \geq \frac{1}{n},$$

blir en positiv kärna över intervallet $(-1, 1)$. (Motiveras ordentligt!)

3) Bestäm en lösning med period 2 till differential-differensekvationen (5p)

$$y'(t) + y(t-1) = \cos^2 \pi t.$$

4) Låt (5p)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nt}{2^n}.$$

Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

5) Redogör i stora drag hur man löser följande problem:

a) Värmeledningsekvationen för en metalltråd av ändlig längd. (1p)

b) Värmeledningsekvationen för en metalltråd av oändlig längd. (2p)

c) Dirichlet-problemet i Enhetsskivan. (2p)

6) Bestäm distributionsderivatan f''' då

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad -\infty < x < \infty.$$

7) Låt $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ vara ett fullständigt ortonormalsystem i ett inre produktrum. Sätt

$$g_n = \phi_{n+1} + a\phi_n, \quad \text{där } a \neq 0.$$

a) Visa att $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ är linjärt oberoede. (2p)

b) Visa att $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ är ej fullständigt för $|a| \leq 1$. (2p)

c) Visa att $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ är fullständigt för $|a| > 1$. (2p)

Lycka till

Lösningförslag SF1629, 2010-06-08, 08.00–13.00

1a) Vi har $\cos^2 x = (\cos 2x + 1)/2$, så vi får dess Fourier-cosinusserie:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

1b) För att få F-sinserien måste vi ha en udda funktion över intervallet $(-\pi, \pi)$. Därför utvidgar vi $f = \cos^2 x$ som en udda funktion $f(x) = -\cos^2 x$ över $(0, \pi)$. Fourier-sinus koefficienterna kan beräknas (anta $n \neq 0, 2$)

$$b_n(f) = \frac{2}{n\pi} \left(1 + \frac{2}{n^2 - 4}\right) ((-1)^n - 1)$$

samt $b_0 = b_2 = 0$. Vi får

$$\cos^2 x = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \left(\frac{2}{(4 - (2m+1)^2) - 1} \right) \sin((2m+1)x).$$

2) Enligt Sats 2.1 i textboken ska tre kriterier vara uppfyllda:

$$K_n(x) \geq 0, \quad \int_{-1}^1 K_n(x) dx = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < 1} K_n(x) dx = 0,$$

för alla $\delta > 0$. Det inses lätt den första och sista kriterierna är uppfyllda. Beräknar vi integralen, och sätter vi villkoret

$$\int_{-1}^1 K_n(x) dx = 1,$$

får vi att $C = \pi/4$.

3) Sätt $y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t}$ och $f(t) = \cos^2 \pi t = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi t}$. Insättning i differential-differensekvationen samt koefficientidentifiering ger

$$c_n = \frac{f_n}{in\pi + (-1)^n}.$$

Vi har

$$f_n = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos^2(\pi t) e^{in\pi t} dt,$$

som ger

$$f_0 = \frac{1}{2}, \quad f_{\pm 2} = \frac{1}{4}, \quad f_n = 0, \quad n \neq 0, \pm 2.$$

Detta ger

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_{\pm 2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 \pm 2i\pi}, \quad c_n = 0, \quad n \neq 0, \pm 2.$$

Alltså

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi^2 + 1} \left(\frac{1}{2} \cos 2\pi t + \pi \sin 2\pi t \right)$$

4) Använd Parsevals formel

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Detta ger med $a_0 = 2$, $a_n = 2^{-n}$ för $n \geq 1$, $b_n = 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{7}{3},$$

dvs

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{7\pi}{3}.$$

5) Se i textboken.

6) Sätt

$$f(x) = (x^2 - 1)(1 - 2H(x + 1) + 2H(x - 1)),$$

där H är Heaviside funktionen, och derivera. Använd även att $(x^2 - 1)\delta(x \pm 1) = 0$ etc...
Vi får

$$\begin{aligned} f' &= 2x(1 - 2H(x + 1) + 2H(x - 1)) + (x^2 - 1)(-2\delta(x + 1) + 2\delta(x - 1)) \\ &= 2x(1 - 2H(x + 1) + 2H(x - 1)) \\ f'' &= 2(1 - 2H(x + 1) + 2H(x - 1)) + 2x(-2\delta(x + 1) + 2\delta(x - 1)) = \\ &= 2(1 - 2H(x + 1) + 2H(x - 1)) + 4\delta(x + 1) + 4\delta(x - 1) \end{aligned}$$

Derivera en gång till så får man

$$f''' = 4(\delta'(x + 1) - \delta(x + 1) + \delta'(x - 1) + \delta(x - 1)).$$

7a) Vi har

$$0 = \sum_{n=0}^N a_n g_n = a a_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^N (a a_n + a_{n-1}) \phi_n + a_{N+1} \phi_{N+1}.$$

Eftersom ϕ_n är ortogonal, så är de linjärt oberoende, därför är

$$a_0 = 0, \quad a_{N+1} = 0, \quad a a_n + a_{n-1} = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

Eftersom $a \neq 0$ ger detta rekursivt $a_n = 0$, dvs linjärt oberoende.

7b-c) Låt f vara en given funktion i det givna inreproduktrummet. Vi har

$$f = \sum_0^{\infty} c_n \phi_n, \quad c_n = \langle f, \phi_n \rangle.$$

Om ortogonalsystemet $\{g_n\}_0^{\infty}$ inte är fullständigt så vill vi finna $f \neq 0$ så att $0 = \langle f, g_n \rangle$ för alla n . Detta ger $\bar{a} \langle f, \phi_n \rangle + \langle f, \phi_{n+1} \rangle = 0$ som i sin tur efter iterationer ger, där $\gamma_n = \langle f, \phi_n \rangle$:

$$\gamma_{n+1} = -\bar{a} \gamma_n = \dots = (-\bar{a})^{n+1} \gamma_0$$

Valet $\gamma_0 = 1$ ger $\gamma_{n+1} = (-\bar{a})^{n+1}$. Dvs $f = \sum (-\bar{a})^n \phi_n$. Konvergensfrågan avgörs av värdet på a ! Använd Parsevals formel:

$$\|f\|^2 = \sum_1^{\infty} |\gamma_n|^2 = \sum_1^{\infty} |(-\bar{a})^n|^2 = \sum_1^{\infty} |a|^{2n} = \frac{1}{1 - |a|^2},$$

då $|a| < 1$ annars divergerar serien.

Alltså, då $|a| < 1$ så finns det en funktion $f = \sum (-\bar{a})^n \phi_n$ som är ortogonal mot alla g_n , dvs systemet blir ej fullständigt. Om $|a| \geq 1$ så är systemet fullständigt, eftersom det inte finns någon funktion f som är ortogonal mot systemet.