Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 17 april 2010 kl 09.00-14.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt10 adderas till skrivningspoängen.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Bestäm följande kombinatoriska storheter. Det räcker att svara med ett heltal, och 1p får man för varje rätt svar:

$$\binom{17}{14}, \qquad \binom{6}{2,2,2}, \qquad S(6,2)\ .$$

2. (3p) Låt k beteckna ett heltal. Den diofantiska ekvationen

$$345x + 411y = k \cdot 13\ ,$$

saknar lösning när $k = 1$. Förklara varför så är fallet. Ange också ett värde på k för vilket ekvationen har en lösning (x, y), där både x och y är skilda från noll. Motivera!

3. (3p) En sammanhängande planär graf har 5 noder med valens tre, 3 noder med valens fyra, 3 noder med valens fem och en nod med valens sex. Bestäm antalet områden som uppstår när grafen ritas plant.

4. (3p) Använd t ex Fermats lilla sats för att bestämma den minsta positiva resten när talet 314^{159} delas med talet 53.

5. (3p) Bestäm antalet binära ord av längd 15 och som är sådana att antalet ettor är delbart med fem.

DEL II

6. (a) (1p) Är varje träd en bipartit graf? Svaret skall också innehålla en motivering.
   (b) (1p) Rita en bipartit graf med sammanlagt 8 noder som har en Eulerkrets men saknar en hamiltoncykel.
   (c) (1p) Finns det någon bipartit graf med 8 noder som har en hamiltoncykel men som saknar en Eulerkrets.
   (d) (1p) Vilket är det minsta antal kanter man alltid måste lägga till en bipartit graf med 8 noder för att grafen skall bli den kompletta grafen K_8. (Räcker med ett svar på denna deluppgift!)

7. (3p) På hur många sätt kan 7 identiska vita bollar, 6 identiska röda bollar och 5 identiska gula bollar placeras i fyra olika lådor så att ingen låda blir tom.

8. (4p) Bestäm samtliga naturliga tal n för vilka det i ringen Z_n finns precis 16 olika inverterbara element.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna mängden av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$.
   (a) (1p) Låt φ beteckna den permutation i $\mathcal{S}_8$ vars cykelframställning är $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)$. Skriv φ som en produkt av två udda permutationer.
   (b) (1p) Visa att varje jämn permutation φ kan skrivas som en produkt av två udda permutationer ψ_1 och ψ_2.
   (c) (1p) Visa att i $\mathcal{S}_3$ så gäller att om identiteten är en produkt av två udda permutationer ψ_1 och ψ_2, dvs $\mathrm{id.} = \psi_1\psi_2$, så måste ψ_1 vara lika med ψ_2.
   (d) (2p) Om $n \geq 4$, kan då varje jämn permutation i S_n skrivas som en produkt av två olika udda permutationer? Motivera ditt svar.

10. Ge först en lämplig definition av begreppen största gemensamma delaren och minsta gemensamma multipeln till tre hela tal a, b och c, som nedan betecknas med $\mathrm{sgd}(a, b, c)$ resp. $\mathrm{mgm}(a, b, c)$. Lös sedan följande uppgifter.
    (a) (1p) Ange tre olika hela tal a, b och c sådana att
    $$\mathrm{mgm}(a, b, c) \neq \frac{a \cdot b \cdot c}{\mathrm{sgd}(a, b, c)} \ .$$
    (b) (1p) Ange tre olika hela tal a, b och c sådana att
    $$\mathrm{mgm}(a, b, c) = \frac{a \cdot b \cdot c}{\mathrm{sgd}(a, b, c)} \ .$$
    (c) (3p) Formulera och bevisa en sats som klargör i vilka situationer likheten nedan gäller
    $$\mathrm{mgm}(a, b, c) = \frac{a \cdot b \cdot c}{\mathrm{sgd}(a, b, c)} \ .$$