Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 7 juni 2011 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden, tel. 0730547891.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 35p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Vid denna tenta är det inte aktuellt med några bonuspoäng

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Bestäm den minsta positiva resten vid division av talet 7^{1024} med talet 31.

2. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}\ , \qquad n = 2, 3, \dots\ ,$$

med begynnelsevärdena $a_0 = 2$ och $a_1 = -1$.

3. (3p) Rita tre grafer G_1, G_2 och G_3, samtliga med 12 noder och 18 kanter och sådana att,

(i) G_1 har en Eulerkrets men ingen Hamiltoncykel.

(ii) G_2 har en Hamiltoncykel men ingen Eulerkrets.

(iii) G_3 har varken en Eulerkrets eller en Hamiltoncykel.

4. (3p) På hur många olika sätt kan mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ delas in i tre delmängder så att elementen 1, 2 och 3 hamnar i olika mängder.

5. (a) (1p) Låt A beteckna en mängd positiva hela tal. Ge en vettig definition av begreppet största gemensamma delaren, nedan betecknad $\mathrm{sgd}(A)$, till talen i mängden A.

   (b) (2p) Visa att för varje icketom delmängd B till A så gäller att $\mathrm{sgd}(A)$ delar $\mathrm{sgd}(B)$.

DEL II

6. (3p) Visa att det inte finns någon planär sammanhängande graf med 8 noder med valenserna 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, och respektive 10.

7. (3p) Bestäm antalet hela tal mellan 1 och 1320 som inte är delbara med något av talen 10, 11 eller 12.

8. (4p) Lös ekvationen $x^2 + 11x + 2 = 0$ i ringen Z_{315}.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. I denna uppgift betecknar $\mathcal{S}_n$ mängden av samtliga permutationer på mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Permutationerna α och β säges kommutera om $\alpha\beta = \beta\alpha$.

   (a) (1p) Bestäm samtliga permutationer β i $\mathcal{S}_3$ som kommuterar med permutationen $\alpha = (1\ 2\ 3)$.

   (b) (1p) Bestäm fem olika permutationer i $\mathcal{S}_5$ som kommuterar med permutationen $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

   (c) (3p) Låt α vara en permutation i $\mathcal{S}_n$ och antag att α utgör en cykel av längd n, dvs
   $$\alpha = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$$
   där a_1, a_2, ..., a_n är n stycken olika element i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bestäm antalet permutationer i $\mathcal{S}_n$ som kommuterar med α

10. Nedan betraktar vi bipartita grafer med noder i mängderna X och Y och där inga kanter finns mellan noder i X och inga kanter mellan noder i Y.

    (a) (2p) Visa att om $|X| \leq 10$, om noderna i X har grad (valens) minst lika med 4, och om noderna i Y har grad (valens) högst lika med 5 så finns alltid en matchning av en storlek minst lika med 8.

    (b) (3p) Formulera och bevisa en sats som generaliserar situationen ovan och varur resultatet i deluppgiften ovan följer.

    Anm. Du kan få 5p på uppgift 10 genom att lösa (b)-uppgiften först och sedan visa hur resultatet i (a) följer av lösningen till uppgift (b).