Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 4 juni 2009 kl 08.00-13.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt10 adderas till skrivningspoängen.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Lös rekursionsekvationen
$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2} \qquad n = 2, 3, \dots ,$$
med $a_0 = 3$ och $a_1 = 0$.

2. Låt $A = \{a, b, c, d\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
   (a) (1p) Bestäm antalet funktioner från A till B.
   (b) (1p) Bestäm antalet injektiva funktioner från A till B.
   (c) (1p) Bestäm antalet surjektiva funktioner från A till B.

3. Graferna du skall rita i denna uppgift skall sakna multipla kanter, dvs mellan varje par av noder finns högst en kant, och sakna loopar, dvs varje kant skall gå mellan två olika noder.
   (a) (1p) Rita en sammanhängande graf, enligt ovan, med 12 kanter och 9 noder, som har en Hamiltoncykel men saknar Eulerkrets.
   (b) (2p) Rita en sammanhängande graf, enligt ovan, med 12 kanter och 9 noder, som har en Eulerkrets men saknar Hamiltoncykel.

4. För att få poäng på uppgifterna nedan måste svaren motiveras.
   (a) (1p) Är $\psi = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)$ invers till sig själv, dvs $\psi = \psi^{-1}$.
   (b) (1p) Är permutationerna $(1\ 2\ 3\ 4)(4\ 5)$ och $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ konjugerade permutationer.
   (c) (1p) Är permutationen $\varphi = (1\ 5\ 4\ 2)(2\ 3\ 5\ 1)(3\ 2\ 4)$ av elementen i mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en jämn permutation.

5. (3p) Beräkna $138^{241} \pmod{35}$.

DEL II

6. (3p) Rita en sammanhängande ickeplanär graf med $v \geq 7$ noder och $e \leq 10$ kanter.

7. (4p) Ge en formel för antalet binära ord av längd n med a stycken nollor och b stycken ettor, och som har egenskapen att inga ettor kommer direkt efter varandra.

8. (4p) Femton barn skall ställa sig i tre led, men barnet A skall stå först i ett av leden, och B sist i samma led som A, men mellan A och B skall stå minst två barn. På hur många sätt kan detta ske?.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (4p) Låt $\chi(G)$ beteckna det kromatiska talet för en graf G, och låt $\bar{G}$ beteckna grafen G:s komplement. Visa att

   $$\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n ,$$

   där n betecknar antalet noder i grafen G.

10. (a) (1p) Bestäm ett tal n sådant att ekvationen $x^2 = 1$ har precis två lösningar i ringen Z_n.
    (b) (1p) Bestäm ett tal n sådant att ekvationen $x^2 = 1$ har precis 16 olika lösningar i ringen Z_n.
    (c) (2p) Finns det något tal $n \neq 2$ sådant att ekvationen $x^2 = 1$ har ett udda antal lösningar i ringen Z_n.
    (d) (2p) Finns det något tal n sådant att ekvationen $x^2 = 1$ har precis 20 olika lösningar i ringen Z_n.