Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 17 april 2010 kl 09.00-14.00.

Examinator: Olof Heden.

DEL I

1. (3p) Bestäm följande kombinatoriska storheter. Det räcker att svara med ett heltal, och 1p får man för varje rätt svar:

$$\binom{17}{14}\,, \qquad \binom{6}{2,2,2}\,, \qquad S(6,2)\;.$$

Lösning:

$$\binom{17}{14} = \binom{17}{3} = \frac{17\cdot 16\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3} = 17\cdot 8\cdot 5 = 17\cdot 40 = 680\;.$$

$$\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^3} = 6\cdot 5\cdot 3 = 90\;.$$

$$S(6,2) = S(5,1)+2S(5,2) = 1+2(S(4,1)+2S(4,2)) = 1+2(1+2(S(3,1)+S(3,2))) =$$
$$= 1+2(1+2(1+2(S(2,1)+2S(2,2)))) = 1+2(1+2(1+2(1+2\cdot 1)))) = 31\;.$$

2. (3p) Låt k beteckna ett heltal. Den diofantiska ekvationen

$$345x + 411y = k\cdot 13\;,$$

saknar lösning när $k=1$. Förklara varför så är fallet. Ange också ett värde på k för vilket ekvationen har en lösning (x,y), där både x och y är skilda från noll. Motivera!

Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{array}{rcl} 411 &=& 1\cdot 345 + 66 \\ 345 &=& 5\cdot 66 + 15 \\ 66 &=& 4\cdot 15 + 6 \\ 15 &=& 2\cdot 6 + 3 \\ 6 &=& 2\cdot 3 \end{array}$$

så den största gemensamma delaren till de bägge talen 411 och 345 är 3. Om nu 3 delar dessa två tal så måste talet 3 också dela 13, om ekvationen skall vara lösbar för $k=1$, vilket det ju inte gör, så ekvationen är inte lösbar när $k=1$. Men vi vet av erfarenhet att ekvationen

$$411x + 345y = 3\;,$$

har en lösning x' och y', dvs $411x' + 345y' = 3$. Då gäller

$$411\cdot 13x' + 345\cdot 13y' = 13\cdot 3\;.$$

Med $k=3$ har vi alltså en lösning.

3. (3p) En sammanhängande planär graf har 5 noder med valens tre, 3 noder med valens fyra, 3 noder med valens fem och en nod med valens sex. Bestäm antalet områden som uppstår när grafen ritas plant.

   Lösning: Summan av alla noders valenser, dvs talet 48, är lika med två gånger antalet kanter, som alltså är 24. Vi använder nu Eulers polyederformel $v + r = e + 2$ och får

   $$r = e + 2 - v = 24 + 2 - 12 = 14\ .$$

4. (3p) Använd t ex Fermats lilla sats för att bestämma den minsta positiva resten när talet 314^{159} delas med talet 53.

   Lösning: Vi konstaterar att 53 är ett primtal. Fermats lilla sats ger då, emedan $314 = 6 \cdot 53 - 4$,

   $$314^{159} \equiv_{53} (-4)^{3 \cdot 52+3} \equiv_{53} ((-4)^{52})^3(-4)^3 \equiv_{53} 1^3(-64) \equiv_{53} -11 \equiv_{53} 42\ .$$

5. (3p) Bestäm antalet binära ord av längd 15 och som är sådana att antalet ettor är delbart med fem.

   Lösning: Antalet binära ord av längd n med precis k stycken ettor är lika med antalet sätt att välja de k positionerna till ettorna dvs

   $$\binom{n}{k}\ .$$

   Antal ettor i de beskrivna orden är alltså 0, 5, 10 eller 15, så vi får totalt

   $$\binom{15}{0} + \binom{15}{5} + \binom{15}{10} + \binom{15}{15} = 2 + 2 \cdot \binom{15}{5}\ .$$

DEL II

6. (a) (1p) Är varje träd en bipartit graf? Svaret skall också innehålla en motivering.

   Lösning: Varje träd är en 2-färgbar graf, eftersom alla cykler (det finns inga i ett träd) har jämn längd. Varje 2-färgbar graf är bipartit. Så

   Svar: Ja.

   (b) (1p) Rita en bipartit graf med sammanlagt 8 noder som har en Eulerkrets men saknar en hamiltoncykel.

   Lösning: Den kompletta bipartita grafen $K_{2,6}$ har 8 noder. Nodernas valenser är antingen 6 eller 2, så alla noder har jämn valens och därmed har grafen en Eulerkrets. Varannan nod i varje stig innehåller en nod från den del av noderna som innehåller 2 noder och varannan från nodemängden med 6 noder. En cykel med 8 olika noder finns alltså inte.

   (c) (1p) Finns det någon bipartit graf med 8 noder som har en hamiltoncykel men som saknar en Eulerkrets.

   Lösning: Tag bort en kant från $K_{4,4}$, vilken som helst. Två noder får då valens tre och grafen kan inte ha en Eulerkrets, eftersom alla noder inte har en jämn valens. Men det är ju lätt att rita en hamiltoncykel i denna graf.

(d) (1p) Vilket är det minsta antal kanter man alltid måste lägga till en bipartit graf med 8 noder för att grafen skall bli den kompletta grafen K_8. (Räcker med ett svar på denna deluppgift!)

Lösning: Den kompletta bipartita grafen $K_{k,8-k}$ har $e(k) = k \cdot (8-k)$ stycken noder. Vi finner att $e(1) = e(7) = 7$, $e(2) = e(6) = 12$, $e(3) = e(5) = 15$ och $e(4) = 16$. Den kompletta grafen K_8 har totalt $8 \cdot 7/2 = 28$ kanter så

SVAR: totalt $28 - e(k)$ kanter måste man komplettera med, dvs minst 12 kanter måste ritas ut.

7. (3p) På hur många sätt kan 7 identiska vita bollar, 6 identiska röda bollar och 5 identiska gula bollar placeras i fyra olika lådor så att ingen låda blir tom.

Lösning: Vi använder principen om inklusion exklusion. Lådorna numreras 1, 2, 3 och 4. Totala antalet fördelningar, om vi tillåter tomma lådor, blir enligt multiplikationsprincipen, eftersom bollar av samma färg är identiska,

$$\binom{7+4-1}{4-1} \cdot \binom{6+4-1}{4-1} \cdot \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{8}{3}$$

Antal fördelningar där låda nummer i är tom, då skall bollarna placeras i tre lådor, blir

$$\binom{7+3-1}{3-1} \cdot \binom{6+3-1}{3-1} \cdot \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{7}{2}$$

Antal fördelningar där de två lådorna nummer $i \neq j$ är tomma, då skall bollarna placeras i två lådor, blir

$$\binom{7+1-1}{2-1} \cdot \binom{6+2-1}{2-1} \cdot \binom{5+2-1}{2-1} = \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \, .$$

Det finns ett sätt att placera alla bollar i en av de fyra lådorna är ett.

Formeln för inklusion exklusion ger nu svaret

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{8}{3} - \binom{4}{1}(\binom{9}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{7}{2}) + \binom{4}{2}(8 \cdot 7 \cdot 6) - \binom{4}{3} \cdot 1 \, .$$

8. (4p) Bestäm samtliga naturliga tal n för vilka det i ringen Z_n finns precis 16 olika inverterbara element.

Lösning: Ett element a i ringen Z_n är inverterbart om och endast om $\mathrm{sgd}(a, n) = 1$, dvs a och n är relativt prima. Antal tal i intervallet 1 till n som är relativt prima till n beskrivs av Eulers φ-funktion, som kan beräknas enligt formel

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i}) \, ,$$

där p_1, p_2, ..., p_k är de olika tal som finns med i en primtalsfaktorisering av n

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{e_k} \, .$$

Så de sökta talen n skall alltså satisfiera

$$16 = \frac{n}{\prod_{i=1}^{k} p_i} \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i - 1} \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1) \, ,$$

där m är ett heltal, kvoten ovan. Så $\prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$ är en delare till talet 16. Vi har att välja bland primtalen 2, 3, 5, 7, 11 och 13, varav 7, 11 och 13 direkt kan ratas eftersom inget av talen $7 - 1$,

$11 - 1$ eller $13 - 1$ delar talet 16. Inte heller talen 3 och 5 delar talet 16, så enda möjligheten är att $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ och $e_2 \leq 1$, samt $p_3 = 5$ med $e_3 \leq 1$.

Fall 1: $e_2 = 0$ och $e_3 = 0$. Vi har att uppfylla likheten

$$16 = p_1^{e_1 - 1}(2 - 1) \ ,$$

vilket ju är OK för $e_1 = 5$, så $n = p_1^5 = 32$ exempelet Z_{32} på en efterfrågad ring.

Fall 2: $e_2 = 1$ och $e_3 = 0$. Vi har att uppfylla likheten

$$16 = p_1^{e_1 - 1}(2 - 1)(3 - 1) \ ,$$

vilket ju är OK för $e_1 = 4$, så $n = p_1^4 p_2 = 16 \cdot 3 = 48$ med Z_{48} ger ytterligare ett exempel på en efterfrågad ring.

Fall 3: $e_2 = 0$ och $e_3 = 1$. Vi har att uppfylla likheten

$$16 = p_1^{e_1 - 1}(2 - 1)(5 - 1) \ ,$$

vilket ju är OK för $e_1 = 3$, så $n = p_1^3 \cdot 5 = 40$ och Z_{40} är ännu ett exempel på en efterfrågad ring.

Fall 4: $e_2 = 1$ och $e_3 = 1$. Vi har att uppfylla likheten

$$16 = p_1^{e_1 - 1}(2 - 1)(3 - 1)(5 - 1) \ ,$$

vilket ju är OK för $e_1 = 2$, så $n = p_1^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, ger Z_{60} är också ett exempel på en efterfrågad ring.

Men vi har förbisett fallet med primtalet $p_4 = 17$. Då $17 - 1 = 16$ så har vi att

$$16 = p_1^{e_1 - 1}(2 - 1)(17 - 1) \ ,$$

vilket ju är OK för $e_1 = 1$ (och $e_1 = 0$), så två fall till $n = p_1 \cdot 17 = 34$ och $n = 17$, och ringarna Z_{34} och Z_{17}.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt $\mathcal{S}_n$ beteckna mängden av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   (a) (1p) Låt φ beteckna den permutation i $\mathcal{S}_8$ vars cykelframställning är $\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8)$. Skriv φ som en produkt av två udda permutationer.

   Lösning: Vi skriver φ som en produkt av transpositioner

   $$\varphi = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(6\ 8)(6\ 7) \ ,$$

   så totalt en produkt av sex transpositioner, vi tar tre av dessa, i ordning som ovan, och kombinerar till en permutation, och de övriga tre till en annan, så

   $$\psi_1 = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3) \ , \qquad \psi_2 = (1\ 2)(6\ 8)(6\ 7)$$

   båda är udda och φ en produkt av ψ_1 och ψ_2.

(b) (1p) Visa att varje jämn permutation φ kan skrivas som en produkt av två udda permutationer ψ_1 och ψ_2.

Lösning: Antag att φ är en produkt av $2n$ transpositioner τ_i, för $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Om $n \neq 0$ låter vi

$$\psi_1 = \tau_1 \ , \qquad \psi_2 = \prod_{i=2}^{2n} \tau_i \ ,$$

vilka är två udda permutationer. Om $n = 0$ har vi

$$\mathrm{id} = (1\ 2)(1\ 2) \ .$$

(c) (1p) Visa att i $\mathcal{S}_3$ så gäller att om identiteten är en produkt av två udda permutationer ψ_1 och ψ_2, dvs id. $= \psi_1\psi_2$, så måste ψ_1 vara lika med ψ_2.

Lösning: De enda udda permutationerna i $\mathcal{S}_3$ är

$$(1\ 2) \ , \qquad (1\ 3) \ , \qquad (2\ 3) \ .$$

Produkten av två olika av dessa blir aldrig identiteten.

(d) (2p) Om $n \geq 4$, kan då varje jämn permutation i S_n skrivas som en produkt av två olika udda permutationer? Motivera ditt svar.

Lösning: Antag $\varphi \neq$ id. Skriv φ som en produkt av $2n$ transpositioner, som i deluppgift b), och låt ψ_1 och ψ_2 vara som där. Om $\psi_1 = \psi_2$ skulle $\psi_1\psi_2 =$ id. $\neq \varphi$, eftersom ψ_1 har ordning 2. Alltså $\psi_1 \neq \psi_2$.
Vi skriver nu id. som en produkt av två udda permutationer, nämligen

$$\mathrm{id.} = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 4\ 3\ 2) \ ,$$

och lösningen är komplett.

10. Ge först en lämplig definition av begreppen största gemensamma delaren och minsta gemensamma multipeln till tre hela tal a, b och c, som nedan betecknas med $\mathrm{sgd}(a, b, c)$ resp. $\mathrm{mgm}(a, b, c)$. Lös sedan följande uppgifter.

(a) (1p) Ange tre olika hela tal a, b och c sådana att

$$\mathrm{mgm}(a, b, c) \neq \frac{a \cdot b \cdot c}{\mathrm{sgd}(a, b, c)} \ .$$

Lösning: Elementära räkningar ger att

$$\mathrm{mgm}(2, 4, 8) = 8 \neq 32 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 8}{\mathrm{sgd}(2, 4, 8)} \ .$$

(b) (1p) Ange tre olika hela tal a, b och c sådana att

$$\mathrm{mgm}(a, b, c) = \frac{a \cdot b \cdot c}{\mathrm{sgd}(a, b, c)} \ .$$

Lösning: Elementära räkningar ger att

$$\mathrm{mgm}(2, 3, 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{1} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{\mathrm{sgd}(2, 3, 5)} \ .$$

(c) (3p) Formulera och bevisa en sats som klargör i vilka situationer likheten nedan gäller

$$\mathrm{mgm}(a,b,c) = \frac{a \cdot b \cdot c}{\mathrm{sgd}(a,b,c)} \ .$$

Lösning: Vi låter p_1, p_2, ..., p_k vara de primtal som är delare till minst ett av talen a, b och c, och primfaktoriserar dessa tal:

$$a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i} \ , \qquad b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{f_i} \ , \qquad c = \prod_{i=1}^{k} p_i^{g_i} \ ,$$

där alla exponenter ovan är ickenegativa. Det gäller då att

$$\mathrm{mgm}(a,b,c) \cdot \mathrm{sgd}(a,b,c) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{e_i,f_i,g_i\}} \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{e_i,f_i,g_i\}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{e_i,f_i,g_i\}+\min\{e_i,f_i,g_i\}}$$

och vidare

$$a \cdot b \cdot c = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i+f_i+g_i} \ .$$

Den givna likheten gäller således endast om för alla $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$e_i + f_i + g_i = \max\{e_i, f_i, g_i\} + \min\{e_i, f_i, g_i\} \ .$$

Så för att likheten skall gälla skall för vart och ett av i:na minst en av e_i, f_i och g_i att vara lika med noll, vilket också då kommer att vara det minsta av de tre talen e_i, f_i och g_i, eller ekvivalent

$$e_i + f_i + g_i = \max\{e_i, f_i, g_i\} \ .$$

Så

Sats. *Formeln*

$$\mathrm{mgm}(a,b,c) = \frac{a \cdot b \cdot c}{\mathrm{sgd}(a,b,c)}$$

gäller om och endast om varje primtal delar högst ett av talen a, b och c, dvs talen a, b och c är parvis relativt prima.