Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret Matematik, moment A, för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 4 juni 2009 kl 08.00-13.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

12	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen under vt10 adderas till skrivningspoängen.

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. (3p) Lös rekursionsekvationen

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2} \qquad n = 2, 3, \dots ,$$

med $a_0 = 3$ och $a_1 = 0$.

Lösning: Rekursionsekvationens karakteristiska ekvation

$$r^2 = 2r + 8$$

har rötterna $r = -2$ och $r = 4$ och därmed blir rekursionsekvationens allmänna lösning

$$a_n = A(-2)^n + B4^n \ .$$

När vi söker en anpassning av A och B till begynnelsevärdesvillkoren får vi systemet

$$\begin{cases} A + B &= 3 \\ -2A + 4B &= 0 \end{cases}$$

som ju enkelt ses ha lösningen $A = 2$ och $B = 1$ så

SVAR: $a_n = 2(-2)^n + 4^n$.

2. Låt $A = \{a, b, c, d\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(a) (1p) Bestäm antalet funktioner från A till B.

Lösning: Till varje element i A finns sju olika möjligheter att tillordna ett funktionsvr̈de i B så totalt, enligt multiplikationsprincipen, finns

SVAR: 7^4 olika funktioner från A till B.

(b) (1p) Bestäm antalet injektiva funktioner från A till B.

Lösning: Om vi succesivt väljer funktionsvärden åt a, b, c och d har vi först sju möjligheter för $f(a)$, sen sex möjligheter till $f(b)$ etc så
SVAR: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ olika injectiva funktioner.

(c) (1p) Bestäm antalet surjektiva funktioner från A till B.

Lösning: Eftersom antalet element i B är större än antalet element i A så finns ingen surjektion från A till B, så
SVAR: 0.

3. Graferna du skall rita i denna uppgift skall sakna multipla kanter, dvs mellan varje par av noder finns högst en kant, och sakna loopar, dvs varje kant skall gå mellan två olika noder.

(a) (1p) Rita en sammanhängande graf, enligt ovan, med 12 kanter och 9 noder, som har en Hamiltoncykel men saknar Eulerkrets.

Lösning: Rita först en cykelgraf med noderna a_1, för $i = 0, 1, 2, \ldots, 8$ och kanter mellan noderna a_i och a_{i+1} för $i = 0, 1, \ldots, 7$ samt mellan noderna a_8 och a_0. Rita sedan kanter mellan a_0 och a_2, a_1 och a_3 och a_4 och a_6 till exempel. Cykeln i cykelgrafen är en Hamiltonstig, och eftersom det finns noder med udda valens saknas en Eulerkrets.

(b) (2p) Rita en sammanhängande graf, enligt ovan, med 12 kanter och 9 noder, som har en Eulerkrets men saknar Hamiltoncykel.

Lösning: Rita en triangel med hörnen a, b och c, samt med dubblerade kanter. Rita ut en nod ”mitt på” varje kant. Nu har vi nio noder och tolv kanter, alla noder har jämn valens så en Eulerkrets finns, men det är ju lätt att se att ingen Hamiltoncykel finns.

4. För att få poäng på uppgifterna nedan måste svaren motiveras.

(a) (1p) Är $\psi = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)$ invers till sig själv, dvs $\psi = \psi^{-1}$.

Lösning: Enklast är kanske att först skriva ψ som en produkt av disjunkta cykler

$$\psi = (1\ 2\ 3\ 4)\ .$$

Om $\psi^{-1} = \psi$ skulle $\psi\psi = \text{id.}$, men

$$\psi^2 = (1\ 3)(2\ 4) \neq \text{id.}\ ,$$

SVAR: Nej.

(b) (1p) Är permutationerna $(1\ 2\ 3\ 4)(4\ 5)$ och $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ konjugerade permutationer.

Lösning: Vi skriver den först givna permutationen som en produkt av disjunkta cykler

$$(1\ 2\ 3\ 4)(4\ 5) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ ,$$

så permutationerna är inte bara konjugerade utan till och med lika.

(c) (1p) Är permutationen $\varphi = (1\ 5\ 4\ 2)(2\ 3\ 5\ 1)(3\ 2\ 4)$ av elementen i mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en jämn permutation.

Lösning: En cykel med jämn längd är en udda permutation och en med udda längd är en jämn permutation. Vidare är udda gånger udda jämnt, udda gånger jämnt är udda och jämnt gånger jämnt är jämnt, så
SVAR: En jämn permutation.

5. (3p) Beräkna $138^{241} \pmod{35}$.

Lösning: Vi använder oss av Eulers sats som säger att

$$\text{sgd}(a,n) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

där $\varphi(n)$ är Eulers φ-funktion.

Då $35 = 5 \cdot 7$ och då varken 7 eller 5 delar talet 138 och då

$$\varphi(35) = 35(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7}) = 24$$

så får vi alltså

$$138^{241} \equiv_{35} (4 \cdot 35 - 2)^{241} \equiv_{35} (-2)^{241} \equiv_{35} ((-2)^{24})^{10}(-2)^1 \equiv_{35} -2 \equiv_{35} 33 \; .$$

SVAR: 33.

DEL II

6. (3p) Rita en sammanhängande ickeplanär graf med $v \geq 7$ noder och $e \leq 10$ kanter.

Lösning: Tag den kompletta bipartita grafen $K_{3,3}$ och rita till en kant från valfri nod i denna graf till en ny nod.

7. (4p) Ge en formel för antalet binära ord av längd n med a stycken nollor och b stycken ettor, och som har egenskapen att inga ettor kommer direkt efter varandra.

Lösning: Antalet nollor måste vara minst lika med $b - 1$, eftersom i vart och ett av de $b - 1$ mellanrummen mellan ettorna måste finnas minst en nolla.

Betrakta nu ett ord med a stycken nollor, och placera ut ettor för att få ett ord med b stycken ettor. Ettor kan placeras framför, efter eller mellan nollorna, och som mest en etta i varje möjlig position. Totalt finns $a + 1$ möjliga positioner för ettorna, ($a - 1$ mellanrum mellan nollorna, framför alla nollor, eller efter alla nollor), så

SVAR:

$$\binom{a+1}{b}$$

8. (4p) Femton barn skall ställa sig i tre led, men barnet A skall stå först i ett av leden, och B sist i samma led som A, men mellan A och B skall stå minst två barn. På hur många sätt kan detta ske?.

Lösning: Betrakta ledet mellan A och B som ett led. Mellan A och B skall stå k stycken barn för $k = 2, 3, \ldots, 11$ barn, eftersom av de tretton övriga barnen skall minst två bilda de två övriga leden. Välj k barn till ledet med A och B samt ställ dem i ett led mellan A och B. Antalet möjligeher blir

$$k! \cdot \binom{13}{k} \; .$$

Välj sedan de två som skall stå först i de andra bägge leden, vilket går på

$$\binom{13-k}{2}$$

olika sätt. De som står först benämner vi L_1 och L_2. Ställ de övriga i ett led, vilket går på

$$(13 - k - 2)!$$

olika sätt. Klipp sedan av detta led i två bitar, de som står främst placeras efter L_1 de andra efter L_2. Eftersom det finns totalt $13 - k - 2 + 1$ olika ställen att sära ledet på, så för varje k, och enligt multiplikationsprincipen finns total

$$(13 - k - 1)[(13 - k - 2)!]\binom{13 - k}{2} \cdot k! \cdot \binom{13}{k}$$

olika möjligheter. Summerar vi nu över de olika möjliga värdena på k får vi

SVAR:

$$\sum_{k=2}^{11}(13 - k - 1)!\binom{13 - k}{2} \cdot k! \cdot \binom{13}{k}$$

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. (4p) Låt $\chi(G)$ beteckna det kromatiska talet för en graf G, och låt $\bar{G}$ beteckna grafen G:s komplement. Visa att

$$\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n ,$$

där n betecknar antalet noder i grafen G.

Lösning: Betrakta färgläggningar av noderna i G resp $\bar{G}$ med ett minimalt antal färger $s_1, s_2, \ldots, s_a$ resp $t_1, t_2, \ldots, t_b$, där alltså $\chi(G) = a$ och $\chi(\bar{G}) = b$. Vi skall visa att det alltid gäller att $n \leq ab$.

Till varje nod associeras ett par (s_i, t_j) av färger, färgen s_i i G och färgen t_j i $\bar{G}$. Nu, till två olika noder kan inte samma färgpar associeras, de är grannar antingen i G eller i $\bar{G}$, så antingen måste de ha olika färger i G eller i $\bar{G}$. Antalet olika färgpar måste då enligt ”pigeonhole principen” vara minst lika med n. Men antalet möjliga färgpar är precis ab.

10. (a) (1p) Bestäm ett tal n sådant att ekvationen $x^2 = 1$ har precis två lösningar i ringen Z_n.

Lösning: I ringen Z_3 gäller

$$0^2 = 0 , \qquad 1^2 = 1 , \qquad 2^2 = 1 ,$$

så

SVAR: T ex Z_3.

(b) (1p) Bestäm ett tal n sådant att ekvationen $x^2 = 1$ har precis 16 olika lösningar i ringen Z_n.

Lösning: Vis av erfarenheten från föregående uppgift ser vi att i ringar Z_p, där p är ett primtal, gäller

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x - 1)(x + 1) \equiv 0 \pmod{p} ,$$

vilket ger att p, eftersom p är ett primtal, delar antingen $x + 1$ eller $x - 1$ eller både $x - 1$ och $x + 1$. Men om primtalet p delar både $x - 1$ och $x + 1$ skulle p dela $(x + 1) - (x - 1)$ och därmed skulle p dela talet 2. Således i alla ringar Z_p, där $p > 2$ är ett primtal har ekvationen x^2

precis två lösningar, $(x+1) \equiv 0 \pmod p$, dvs $x = -1$ i Z_p, resp $(x-1) \equiv 0 \pmod p$, dvs $x = 1$ i Z_p

Nu utnyttjar vi Kinesiska restsatsen och låter $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$ och ser att ringen Z_{1155} är isomorf med den direkta produkten av ringarna Z_3, Z_5, Z_7 och Z_{11}. Om nu

$$x \in Z_{1155} \qquad \longleftrightarrow \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Z_3 \times Z_5 \times Z_7 \times Z_{11} \ ,$$

så har vi att en lösning till $x^2 = 1$ i Z_{1155} svarar mot en kombination av lösningar till ekvationerna $x_i^2 = 1$, för $i = 1, 2, 3, 4$, i respektive ring. Det finns precis $2^4 = 16$ olika sådana kombinationer, och därmed har vi hittat en ring, ringen Z_{1155}, som svarar mot kraven i uppgiften.

(c) (2p) Finns det något tal $n \neq 2$ sådant att ekvationen $x^2 = 1$ har ett udda antal lösningar i ringen Z_n.

Lösning: Vi observerar att om $x = a$ är en lösning till ekvationen $x^2 = 1$ så kommer även $x = -a$ att vara en lösning. Lösningarna till $x^2 = 1$ uppträder alltså i par, utom i de fall vi hittar en lösning där $a = -a$. Men då är $2a = 0$ och $a^2 = 1$, vilket skulle ge att

$$0 = (2a)^2 = 4a^2 = 4 \cdot 1 \ ,$$

vilket endast inträffar i ringarna Z_2 och Z_4. Men $n \neq 2$ var förutsatt och i ringen Z_4 har vi $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 0$ och $3^2 = 1$, dvs ett jämnt antal lösningar till $x^2 = 1$. Så

SVAR: Nej det finns ingen sådan ring Z_n.

(d) (2p) Finns det något tal n sådant att ekvationen $x^2 = 1$ har precis 20 olika lösningar i ringen Z_n.

Lösning: Vet enligt kinesiska restsatsen att varje ring Z_n zär isomorf med en direkt produkt av ringar $Z_{p_i^{n_i}}$, där talen p_i, för $i = 1, 2, \ldots, k$, är primtal. I var och en av dessa ringar är antalet lösningar till ekvationen $x^2 = 1$ ett jämnt tal, och som i uppgift (b) skulle vi se, eftersom $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, att det funnes en ring $Z_{p_i^{n_i}}$ med antingen 10 eller 20 lösningar till $x^2 = 1$. Vi undersöker nu om såär fallet.

Vi studerar nu antalet olika lösningar i ringen $Z_{p_i^{n_i}}$, där vi kan, med lösningen i (b), förutsätta att $n_i > 1$.

Om nu $p_i^{n_i}$ delar $x^2 - 1$ skulle det finnas ett tal d sådant att

$$d \cdot p_i^{n_i} = (x-1)(x+1)$$

Om $p_i^{n_i}$ delar antingen $x - 1$ eller $x + 1$ skulle $x = 1$ eller $x = -1$. Alltså kommer en potens av p_i att dela $x + 1$ och en annan potens av p_i att dela $x - 1$. Detta medför att p_i delar både $x - 1$ och $x + 1$, varav enda möjligheten är att $p_i = 2$, och dessutom speciellt

$$2 \mid x+1 \qquad \text{och} \qquad 2^{n_i - 1} \mid x - 1 \ ,$$

eller tvärtom. Detta ger precis fyra lösningar i en ring Z_{2^t} där $t \geq 3$, nämligen

$$x = \pm 1 \ , \qquad x = \pm(2^{t-1} + 1) \ .$$

Så någon ring med 20 rötter till ekvationen $x^2 = 1$ finns inte.