

Matematiska Institutionen  
KTH

**Lösning till lappskrivning nummer 1A till kursen Diskret matematik för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 11 februari 2010, kl 15.15-15.40.**

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

**OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.**

1. Undersök om det finns något träd med 34 noder, varav 5 noder har valensen (graden) 1, 8 noder har valensen 2, 15 noder har valensen 3 och 6 noder har valensen 4.

**Lösning:** Eftersom det i alla grafer gäller att summan av alla noders valenser är lika med två gånger antalet kanter kommer antal kanter  $e$  i grafen att vara lika med

$$e = \frac{1}{2}(5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 6 \cdot 4) = 45 .$$

I varje träd är antalet noder ett fler än antalet kanter. Då antal noder i den beskrivna grafen är lika med  $5 + 8 + 15 + 6 = 34$ , så kan grafen ifråga inte vara ett träd.

2. Undersök om det finns någon sammanhängande planär graf med egenskapen att alla noder har valensen (=graden) tre och att vid en plan ritning av grafen uppstår minst 7 områden vilka samtliga begränsas av antingen 3 eller 4 kanter.

**Lösning:** Låt  $v$  beteckna antalet noder och  $e$  antalet kanter. Låt  $x$  beteckna antalet områden som begränsas av 3 kanter och  $y$  antalet områden som begränsas av 4 kanter.

Då varje nod har valensen 3 så gäller att  $2e = 3v$ . Sedvanliga räkningar i incidenstabeller, varje kant är gräns till precis två områden, ger  $2e = 3x + 4y$ . Alltså

$$v = \frac{1}{3}2e = \frac{1}{3}(3x + 4y) ,$$

Eftersom antalet områden  $r$  är  $r = x + y$ , ger nu Eulers formel för sammanhängande planära grafer, dvs  $v + r = e + 2$ , att

$$\frac{1}{3}(3x + 4y) + (x + y) = \frac{1}{2}(3x + 4y) + 2 .$$

Detta ger

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \quad \text{dvs} \quad x + y + \frac{1}{2}x = 6 .$$

Eftersom  $x + y \geq 7$  och  $x \geq 0$  går aldrig denna ekvation att uppfylla. Det fanns alltså ingen sammanhängande planär graf med de givna förutsättningarna.