Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 1B till kursen Diskret matematik för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 11 februari 2010, kl 15.15-15.40.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkanda uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Undersök om det finns något träd med 36 noder, varav 7 noder har valensen (graden) 1, 8 noder har valensen 2, 15 noder har valensen 3 och 6 noder har valensen 4.

Lösning: Eftersom det i alla grafer gäller att summan av alla noders valenser är lika med två gånger antalet kanter kommer antal kanter e i grafen att vara lika med

$$e = \frac{1}{2}(7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 6 \cdot 4) = 46 \ .$$

I varje träd är antalet noder ett fler än antalet kanter. Då antal noder i den beskrivna grafen är lika med $7 + 8 + 15 + 6 = 36$, så kan grafen ifråga inte vara ett träd.

2. Undersök om det finns någon sammanhängande planär graf med egenskapen att alla noder har valensen (=graden) tre och att vid en plan ritning av grafen uppstår minst 7 områden vilka samtliga begränsas av antingen 3 eller 4 kanter.

Lösning: Låt v betckna antalet noder och e antalet kanter. Låt x beteckna antalet områden som begränsas av 3 kanter och y antalet områden som begränsas av 4 kanter.

Då varje nod har valensen 3 så gäller att $2e = 3v$. Sedvanliga räkningar i incidenstabeller, varje kant är gräns till precis två områden, ger $2e = 3x + 4y$. Alltså

$$v = \frac{1}{3}2e = \frac{1}{3}(3x + 4y) \ ,$$

Eftersom antalet områden r är $r = x + y$, ger nu Eulers formel för sammanhängande planära grafer, dvs $v + r = e + 2$, att

$$\frac{1}{3}(3x + 4y) + (x + y) = \frac{1}{2}(3x + 4y) + 2 \ .$$

Detta ger

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \qquad \text{dvs} \qquad x + y + \frac{1}{2}x = 6 \ .$$

Eftersom $x + y \geq 7$ och $x \geq 0$ går aldrig denna ekvation att uppfylla. Det fanns alltså ingen sammanhängande planär graf med de givna förutsättningarna.