

Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5B till kursen Diskret matematik för D2 och F, SF1631 och SF1630, den 3 maj 2010, kl 08.15-08.40.

1. Bestäm antalet sätt att färga sidorna i en regelbunden 5-hörning i k stycken olika färger, om två färgläggningar betraktas som identiska om den kan vridas eller vändas in i varandra. (Tips: Det finns totalt 10 olika sådana vridningar och vändningar, om "identitetsvridningen=(ingen vridning alls)" räknas med.)

Lösning: Vi kallar sidorna i 5-hörningen för 1, 2, 3, 4, och 5. Vi listar nu upp alla vridningar och vändningar och antalet färgläggningar $|Fix(g)|$ som fixeras av vridningen/vändningen g :

g	$ Fix(g) $
(1)(2)(3)(4)(5)	k^5
$\varphi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	k
$\varphi^2 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$	k
$\varphi^3 = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$	k
$\varphi^4 = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$	k
(1)(2\ 5)(3\ 4)	k^3
(2)(3\ 1)(4\ 5)	k^3
(3)(4\ 2)(1\ 5)	k^3
(4)(5\ 3)(1\ 2)	k^3
(5)(1\ 4)(2\ 3)	k^3

Enligt Burnsidess lemma blir nu antalet färgläggningar

$$\frac{1}{10}(1 + 4 \cdot k + 5 \cdot k^3).$$

2. Bestäm *antalet* cykliska grupper G som uppfyller samtliga av följande tre villkor:

- antalet element i G är minst hundra men mindre än 200.
- antalet delgrupper till G , inklusive de s.k. triviala delgrupperna G och $\{e = id. = 1\}$, är 8.
- en av delgrupperna har 7 element en annan har 5 element.

Anm. Vi räknar här två cykliska grupper som identiska om de har samma antal element.)

Lösning: En cyklisk grupp med n element har precis en delgrupp med d element för varje delare d till n , och några fler delgrupper än dessa finns inte. Antalet delare till talet n skall alltså vara åtta, och 5 och 7 skall vara delare. Talet n är då en multipel av 35 som skall ligga mellan 100 och 200, dvs

$$n \in \{ 105, 140, 175 \}.$$

Vi inspekterar nu dessa tal med avseende på delare och finner att

- 105 har delarna 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105, dvs precis åtta stycken delare.
- 140 har delarna 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, ... vilket är fler än åtta.
- 175 har delarna 1, 5, 7, 25, 35, 175, vilket är färre än åtta.

SVAR: Gruppen har 105 element, alla andra möjligheter är uteslutna.