SF1633 Differentialekvationer I.
MODULUPPGIFTER 2.
Högre ordningens linjära differentialekvationer.
System av första ordningens linjära differentialekvationer.
Plana autonoma system.

1. För vilka värden på den reella konstanten a har problemet $y'' + 2y' + ay = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ icke-triviala lösningar, dvs andra lösningar än $y = 0$?

2. Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

   a) Visa att Wronskianen , $W(y_1, y_2)$, till y_1 och y_2 satisfierar $a_2(x)\dfrac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$.

   b) Härled därefter Abels formel $W = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}$, där C är en konstant.

   c) Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,\ -1 < x < 1$.
   Bestäm $W(y_1, y_2)$.

3. Betrakta differentialekvationen $t^4y'' + 7t^3y' + 5t^2y = 1,\ t > 0$.
   Samtliga lösningar till denna ekvation, liksom till den motsvarande homogena (med HL =0), kan uttryckas med hjälp av lämpliga summor av funktioner av typ t^p där p är reellt.
   Bestäm allmänna lösningen till den givna ekvationen.

4. $y = 3e^x,\ y = e^x,\ y = 5e^{-x}$ och $y = 2e^{-x}$ är lösningar till differentialekvationen $y'' - y = 0$.
   Ange en bas för lösningsrummet. Väl underbyggd motivering skall ges.

5. Visa att x^{-1} och x^3 utgör en fundamentalmängd av lösningar till $y'' - x^{-1}y' - 3x^{-2}y = 0$, $x > 0$.
   Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y'' - x^{-1}y' - 3x^{-2}y = 2x$, $x > 0$.

6. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$.

7. Visa att $\{1,\ e^t,\ e^{-2t}\}$ kan bilda en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter. Bestäm också en sådan differentialekvation.

8. Funktionerna $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x\ln x,\ y_3(x) = 5x,\ y_4(x) = x^2$ och $y_5(x) = x + x^2$ är lösningar till en linjär tredje ordningens homogen differentialekvation.
   Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen.
   Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$ och $y''(1) = 1$.

9. Skriv om differentialekvationen $y'' + 2y' + 2y = 0$ som ett linjärt system av första ordningen.
   Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Ange även systemets allmänna lösning.

10. Bestäm en fundamentalmatris till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 2y \\ 11x - 2y \end{pmatrix}$.
    Ange hastighetsvektorn i punkten (2,11).

11. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

12. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 3y + 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y - 1 \end{cases}$.

13. En partikels läge bestäms av systemet $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Bestäm partikelns läge vid en godtycklig tidpunkt t

då $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat?

14. Origo är en kritisk punkt till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$, där μ är en reell konstant med $\mu \neq 3, \mu \neq -1$.

Klassificera för alla μ den kritiska punkten med avseende på typ(nod, sadel osv) och stabilitet/instabilitet.

15. Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1 - x^2 \end{cases}$.

Avgör även stabilitet och typ hos dessa. Bestäm en tangentvektor till lösningskurvan i punkten $(2,3)$.

16. Klassificera med avseende på stabilitet den kritiska punkten $(0,0)$ till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$ för alla reella värden på μ.

17. Givet systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \alpha y + xy \\ \dfrac{x}{x-1} \end{pmatrix}$, där α är en konstant.

För vilka värden på α utgörs trajektorierna i en omgivning till origo av spiraler? Är origo en stabil punkt? Skruvar sig spiralerna med- eller moturs då $t \to \infty$?

SVAR:

1. $a = 1 + n^2$
2. c) $W = \dfrac{C}{1 - x^2}$, $-1 < x < 1$
3. $y = y_h + y_p = C_1 t^{-1} + C_2 t^{-5} - \dfrac{1}{3} t^{-2}$
4. $\{e^x, e^{-x}\}$ är en bas för lösningsrummet till differentialekvationen $y'' - y = 0$.
5. $y_p = -\dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^3}{2} \ln x$
6. $y = Ae^x + Ce^{2x} + (e^{2x} + e^x)\ln(1 + e^x)$
7. $y''' + y'' - 2y' = 0$
8. $\{x,\ x\ln x,\ x^2\}$, $y = x - 3x\ln x + 2x^2$.
9. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ e^{-t}(-\cos t) & e^{-t}(-\sin t) \end{pmatrix}$

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ e^{-t}(-\cos t) & e^{-t}(-\sin t) \end{pmatrix}\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

10. $\Phi = \begin{pmatrix} e^{9t} & 2e^{-4t} \\ e^{9t} & -11e^{-4t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 36 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. $\mathbf{X} = e^{5t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 5\sin 2t \\ 8\cos 2t - 9\sin 2t \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{X} = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} C_2 + \begin{pmatrix} -11t - 15 \\ -11t - 10 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{X} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + 3\sin t \end{pmatrix}$ Partikeln går mot origo längs en spiral, då t växer obegränsat.

14. $\begin{cases} \mu > 3 & \text{Instabil nod.} \\ -1 < \mu < 3 & \text{Instabil spiral.} \\ \mu < -1 & \text{Sadelpunkt, instabil} \end{cases}$

15. $(1,\ 1)$ är en sadelpunkt och är instabil. $(-1,\ -1)$ är en instabil spiralpunkt. En tangentvektor är $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

16. $\mu \le -2$ asymptotiskt stabil. $\mu \ge 2$ instabil.
För $\mu^2 < 4$ erhålles komplexa egenvärden. $\mu = \operatorname{Re}\lambda < 0$ asymptotiskt stabil. $\mu = \operatorname{Re}\lambda > 0$ instabil.
För $\mu = \operatorname{Re}\lambda = 0$ kan ingen slutsats dras från det linjariserade systemet.
För $\mu = \operatorname{Re}\lambda = 0$ blir det icke-linjära systemet linjärt. Stabilt.

17. $\alpha > \frac{1}{4}$. Origo är en stabil punkt. Medurs.