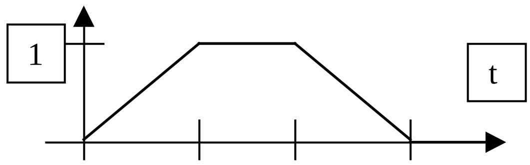
SF1633 Differentialekvationer I.
MODULUPPGIFTER 3a.
Laplacetransformer.

1. Bestäm Laplacetransformen för funktionen vars graf ritats här bredvid.
Grafen består av tre räta linjestycken för $0 \le t \le 3$.
För $t > 3$ är $f(t) = 0$.



2. Lös för $t \ge 0$ ekvationen $y'' + 6y' + 13y = e^{-3t}\sin 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

3. Lös integralekvationen $y(t) + 3\int_0^t \sin(t-u)y(u)du = t$.

4. Lös begynnelsevärdesproblemet
$y'' + 4y' + 4y = (8t-4)U(t-1)$, $t > 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
Här är $U(t)$ Heavisides språngfunktion
("the unit step-function", $U(t) = 1$ för $t \ge 0$ och $U(t) = 0$ för $t < 0$).

5. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = \delta(t-1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
$\delta(t-1)$ är Diracs deltafunktion.

6. Låt $y = f(t)$ vara en lösning till begynnelsevärdesproblemet $y'' + by' + cy = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Visa att lösningen $y = v(t)$ till begynnelsevärdesproblemet $y'' + by' + cy = g(t)$, $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$, där $g(t)$ är en kontinuerlig funktion, som ges av $v(t) = f(t) + \int_0^t f(u)g(t-u)du$.

7. Ett mekaniskt system styrs av ekvationen $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = b(t)$, där $b(t) = \begin{cases} 1 \;, & 1 < t < 2 \\ 0 \;, & \text{för övrigt} \end{cases}$.
Systemet startar i vila $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Bestäm $x(t)$ för $t > 0$.
Tolka den givna differentialekvationen fysikaliskt.

8. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 13y = 3\delta(t-\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

9. Laplacetransformen ges av $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ under lämpliga villkor.
Vilka av följande påståenden är korrekta? Bevis eller motexempel krävs.
a) $L\{t^2\} = \{L\{t\}\}^2$ b) $L\{2t\} = 2L\{t\}$
c) $L\{t + t^2\} = L\{t\}L\{t^2\}$ d) $L\{t + t^2\} = L\{t\} + L\{t^2\}$
e) f är styckvis kontinuerlig för $t \ge 0$ och av exponentiell ordning. $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$ där $F(s) = L\{f(t)\}$.

10. Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen $f(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)d\tau$.

11. Beräkna $y(t)$ för $t > 0$ då $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 5$, där $f(t) = \begin{cases} 0 \;, & 0 \le t < \pi \\ 4\sin t \;, & t \ge \pi \end{cases}$.

12. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y = 60\delta(t-3)$
som uppfyller villkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 10$.

SVAR:

1. $F(s)=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})$

2. $y(t)=\frac{1}{8}e^{-3t}(\sin 2t-2t\cos 2t)$

3. $y(t)=\frac{1}{4}t+\frac{3}{8}\sin 2t$

4 . $y(t)=e^{-2t}+U(t-1)(2(t-1)-1+e^{-2(t-1)})$

5. $y(t)=\cos t+U(t-1)\sin(t-1)$

7. $x(t)=U(t-1)(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}e^{-(t-1)}+\frac{1}{12}e^{-4(t-1)})-U(t-2)(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}e^{-(t-2)}+\frac{1}{12}e^{-4(t-2)})$.

Differentialekvationen representerar rörelsen för en partikel som påverkas av tyngdkraft, dämpning, fjäderkraft samt en kraft. Kraften är noll utom i intervallet från ett till två.

8. $y(t)=e^{-2t}(-e^{2\pi}\sin 3t\ \ U(t-\pi)+\cos 3t+\frac{2}{3}\sin 3t)$

9. a) och c) är falska, b), d) och e) är sanna.

10. $f(t)=\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t$

11. $y(t)=7\cos t+5\sin t-\frac{1}{2}\{\sin(t-\pi)-(t-\pi)\cos(t-\pi)\}U(t-\pi)$

12. $y(t)=5e^{2t}+15U(t-3)(e^{2(t-3)}-e^{-2(t-3)})$