

SF1633 Differentialekvationer I.  
 MODULUPPGIFTER 3b.  
 Fourierserier och partiella differentialekvationer..

1. Undersök om funktionsföljden  $\{1, \cos mt, \sin mt\}$  där  $m = 1, 2, \dots$  och  $n = 1, 2, \dots$  är ortogonal på intervallet  $(-\pi, \pi)$ . Uttryck därefter den  $2\pi$ -periodiska funktionen  $f$  med hjälp av denna funktionsföljd då  $f(t) = t$ ,  $-\pi < t < \pi$ .

2.

a) Visa att  $\{\sin nx\}$ ,  $n = 1, 2, 3$ , utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet  $[0, \pi]$ .

b) Skriv funktionen  $f(x) = \sin^3 x$  på intervallet  $[0, \pi]$  som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.

c) Antag att funktionen  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $0 < x < 3$  är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie.

Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för  $x = 0$ .

3. För den  $2\pi$ -periodiska funktionen  $f$  gäller att:  $f(t) = \pi^2 - t^2$ ,  $-\pi < t < \pi$ .

Bestäm  $f$ :s fourierserie.

Använd sedan den erhållna serien för att beräkna summorna  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ .

4. Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen  $f(x) = |x| + x$ ,  $-1 < x < 1$ .

Bestäm vidare Fourierseriens värde för  $x = 1$ .

5. I ett tabellverk hittar man att  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2}$  är lika med  $\frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2)$ , då  $0 < x < 1$ .

Beräkna  $s(-8/3)$ .

6. Bestäm koefficienterna  $b_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  så att  $\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  då  $0 < x < \pi$ .

7. Bestäm allmänna lösning till differentialekvationen  $y'' + 5y = f(x)$ ,

där  $f(x + 2\pi) = f(x)$  och  $f(x) = x$ ,  $-\pi < x < \pi$ .

8. Den vertikala förflyttningen  $u(x, t)$  för en oändligt lång sträng beskrivs av begynnelse-

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

värdesproblemet:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

a) Genomför transformationen av vågekvationen med hjälp av substitutionen 
$$\begin{aligned} z &= x + at \\ v &= x - at \end{aligned}$$

b) Härled lösningen till den i a) erhållna differentialekvationen.

c) Härled lösningen till begynnelsevärdesproblemet.

d) Tolka det resultat som erhålles då begynnelsehastigheten  $g(x) = 0$ .

9. För en vibrerande sträng med ett luftmotstånd som är proportionellt mot hastigheten är

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2hu_t$$

randvärdesproblemet:  $u(0,t) = u(L,t) = 0$  , där  $0 < h < \frac{\pi a}{L}$  .

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0$$

Bestäm utslaget  $u(x,t)$  . Vilken inverkan har luftmotståndet på strängens rörelse?

10. Lös den partiella differentialekvationen  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  i området  $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$

med randvillkoren  $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$  och

begynnelsevillkoren  $u(x,0) = \sin 2x + 4 \sin 4x$  och  $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$  .

11. Lös följande variant av värmeledningsproblemet:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} , \quad 0 < x < \pi , \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \frac{1}{2}(1 + 3\cos x) , \quad 0 < x < \pi$$

12. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} , \quad 0 < x < \pi , \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \sin x + 10 \sin 3x , \quad 0 < x < \pi$$

13. Bestäm genom variabelseparation den lösning till den partiella differentialekvationen

$$u_x = u_y + u \text{ som uppfyller villkoret } u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x} .$$

14. En sträng är inspänd på x-axeln så att den har sina ändar i  $x = 0$  och  $x = 1$  .

Vid tiden  $t = 0$  befinner den sig i vila men utsätts för ett hammarslag som ger den en

$$\text{begynnelsehastighet av } g(x) = \begin{cases} h , & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 0 , & \text{för övrigt} \end{cases} .$$

Bestäm förflyttningen  $u(x,t)$  då vågekvationen  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  satisfieras.

15. Låt  $u(x,y)$  beteckna den stationära temperaturfördelningen i en tunn kvadratisk platta

$0 < x < 1$  ,  $0 < y < 1$ , ( $u$  uppfyller alltså Laplaces' ekvation  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ) med

$$\text{randvillkoren } \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 , \quad u(x,0) = 0 \text{ och } u(x,1) = \cos 4\pi x .$$

Bestäm temperaturen i mittpunkten  $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  .

16. Värmeledningsproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 10 \text{ kan lösas genom att man sätter } v(x,t) = u(x,t) - 10x.$$

$$u(x,0) = 0$$

a. Visa att  $v(x)$  uppfyller

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$v(0,t) = 0, v(1,t) = 0.$$

$$v(x,0) = -10x$$

b. Lös P.D.E.-problemet för  $v$  och bestäm sedan  $u$ .

SVAR:

$$1. \langle 1, \cos mt \rangle = 0 \quad \langle 1, \sin nt \rangle = 0 \quad \langle \cos mt, \sin nt \rangle = 0 \quad \langle \cos mt, \cos nt \rangle = 0$$

$$\langle \sin mt, \sin nt \rangle = 0 \quad t \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

$$2. a) \langle \sin nx, \sin mx \rangle = 0 \quad b) \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \quad c) \text{Fourierserien: } \frac{0^2 + 1 + 3^2 + 1}{2} = \frac{11}{2},$$

$$\text{cosinusserien: } \frac{0^2 + 1 + 0^2 + 1}{2} = 1, \text{ sinusserien: } \frac{0^2 + 1 - (0^2 + 1)}{2} = 0.$$

$$3. f(t) \sim \frac{2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nt, \quad \frac{1}{n^2} = \frac{2}{6} \text{ och } \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{2}{12}.$$

$$4. f(x) \sim \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2} \cos n\pi x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi x$$

$$\text{Fourierseriens summa för } x = 1 \text{ blir medelvärde } \frac{f(1+) + f(1-)}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1.$$

$$5. s(-8/3) = -\frac{\pi^2}{18}$$

$$6. b_n = 0, n \text{ jämnt och } b_n = \frac{4n}{(n^2 - 4)}, n \text{ udda}$$

$$7. y = y_h + y_p = A \cos \sqrt{5}x + B \sin \sqrt{5}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n(n^2 - 5)} \sin nx$$

$$8. a) \text{ Den transformerade differentialekvationen blir: } \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0.$$

b) Den transformerade differentialekvationen har lösningen:  $u = F(z) + G(v)$  vilken i de gamla koordinaterna ges av  $u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$ .

$$c) \text{ Begynnelsevärdesproblemet har lösningen: } u(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(x) dx.$$

d) Då begynnelsehastigheten  $g(x) = 0$  består lösningen av en superposition av två stående vågor.

9. Utslaget ges av  $u(x,t) = \sum_{n=1} a_n e^{-ht} \sqrt{\omega^2 + h^2} \sin(\alpha + \omega t) \sin \frac{n\pi x}{L}$

där  $a_n = \frac{2}{\omega L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ ,  $\tan \alpha = \frac{\omega}{h}$  och  $\omega = \sqrt{\frac{an\pi}{L}^2 - h^2}$ .

Luftmotståndet på strängens rörelse ger upphov till följande effekter:

Exponentiellt dämpad amplitud, avtagande frekvens  $\omega$  och en fasförskjutning  $\alpha$ .

10.  $u(x,t) = \cos 4t \sin 2x + 4 \cos 8t \sin 4x$

11.  $u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-t} \cos x$

12.  $u(x,t) = \sin x e^{-t} + 10 \sin 3x e^{-9t}$

13.  $u(x,0) = 3e^{-5x-6y} + 2e^{-3x-4y}$

14.  $u(x,t) = \sum_{n=1} \frac{2h}{(n\pi)^2} \left( \cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right) \sin n\pi x \sin n\pi t$

15.  $u(x,y) = \frac{e^{4y} - e^{-4y}}{e^4 - e^{-4}} \cos 4x$   $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e^2 + e^{-2}}$

16.  $v(x,t) = \sum_{n=1} (-1)^n \frac{20}{n\pi} e^{-n^2 t} \sin n\pi x$   $u(x,t) = v(x,t) + 10x$