Efternamn Förnamn Personnummer Program

……………………………………………………………………………………………..

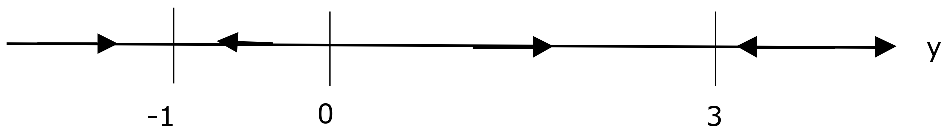
| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

KTH Matematik
SF1633 Differentialekvationer I
Kontrollskrivning nr 1, måndagen den 14 september 2009, kl 09.00-10.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet (attraktor/repellator) de stationära lösningarna till differentialekvationen $y \ = y(y+1)(3 \quad y)$.

……………………………………………………………………….………
Lösningsförslag:

Vi bestämmer först de kritiska punkterna, konstantlösningarna.
Dessa erhålles då derivatan är lika med noll.
Konstantlösningarna är 0, -1 och 3.
Studera derivatans tecken och rita upp funktionens uppförande i faslinjen.



Derivatan är positiv då x<-1 och då 0<x<3, funktionen växer.
PÅ övriga delintervall är derivatan negativ, funktionen avtar.
$y = 0$ är en instabil lösning.
$y = \quad 1$ och $y = 3$ är asymptotiskt stabila lösningar.

SVAR:
$y = 0$ är en instabil lösning.
$y = \quad 1$ och $y = 3$ är asymptotiskt stabila lösningar.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(3 \quad x)y \quad y = 1$ som uppfyller villkoret $y(0) = 2$. Ange vidare lösningens existensintervall.

………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Den givna differentialekvationen är linjär.
En okulärbesiktning ger vid handen att vänstra ledet redan är en derivata.
Differentialekvationen kan skrivas:

$$\frac{d}{dx}\{(3 \quad x)y\} = 1$$

Integrera med avseende på x.

$$(3 \quad x)y = x + C$$

Bestäm konstanten.

Villkoret $y(0) = 2$ ger $C = 6$.

Lösningen ges av $y = \dfrac{6 + x}{3 \quad x}$

Existensintervallet är antingen x<3 eller x>3.
Eftersom villkoret är givet för x=0 blir det aktuella existensintervallet x<3.

SVAR: Differentialekvationens lösning ges av $y = \dfrac{6 + x}{3 \quad x}$ där $x < 3$.

3. En 500 liters tank innehåller ursprungligen 10 gram salt löst i 200 liter vatten. En saltlösning med koncentrationen 0.25 gram per liter pumpas in i tanken med en hastighet av 4 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per minut.
   När är tanken full ?
   Ställ upp en differentialekvation för mängden av salt $Q(t)$.
   Bestäm saltmängden i tanken då tanken är full.

……………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag

Tanken är full då det har pumpats in 500-200=300 liter lösning.
Detta inträffar efter 300/(4-2)=150 minuter.
Vätskevolymen i tanken vid en godtycklig tidpunkt t ges av $L(t) = 200 + 2t$.
Differentialekvationen för mängden salt $Q(t)$ ges av

$$\frac{dQ}{dt}(g/m) = 0.25(\text{g/l})\ \ 4(l/\min)\quad \frac{Q(t)}{L(t)}(\text{g/l})\ \ 2(\text{l/min}).$$

$$\frac{dQ}{dt} = 1\quad \frac{Q(t)}{100+t}$$

Vi har erhållit en linjär differentialekvation.

Den kan skrivas $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{Q(t)}{100+t} = 1$, $(100+t)\dfrac{dQ}{dt} + Q(t) = 100 + t$, $\dfrac{d}{dt}\{(100+t)Q(t)\} = 100 + t$.

Integration med avseende på t ger $(100+t)Q(t) = \dfrac{(100+t)^2}{2} + C$.

Vid tiden $t = 0$ är $Q = 10$ vilket ger att $C = 100\ \ 10\quad \dfrac{100^2}{2} = \quad 4000$.

Mängden salt vid en godtycklig tidpunkt t ges av $Q(t) = \dfrac{100+t}{2}\quad \dfrac{4000}{100+t}$

Då tanken är full är saltmängden $Q(150) = \dfrac{250}{2}\quad \dfrac{4000}{250} = 125\quad 16 = 109$

SVAR: Tanken är full efter 150 minuter.
Då tanken är full är saltmängden 109 gram.