Efternamn Förnamn Personnummer Program

……………… ………………… ……………… ………………

1	2	3	Summa	Betyg

KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 2, måndagen den 28 september 2009, kl 09.00-10.00.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Funktionerna $y_1(x) = 3x^{-1} + 4x^3$, $y_2(x) = x^{-1}$, $y_3(x) = 7x^3$ och $y_4(x) = x^{-1} + x^3$
är lösningar till en linjär andra ordningens homogen differentialekvation.
Denna differentialekvation är $x^2y'' - xy' - 3y = 0$, $x > 0$
Ange en bas för lösningsrummet.
Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 3$ och $y'(1) = 5$.

…………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

För att bestämma en bas för lösningsrummet till en linjär andra ordningens homogen differentialekvation behövs två linjärt oberoende lösningar.
Vi väljer ut två lösningar: $y_I(x) = x^{-1}$ och $y_{II}(x) = x^3$.
Det linjära oberoendet visas med hjälp av Wronskianen.
Den skall vara skilt ifrån noll.

$$W(x^{-1}, x^3) = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^3 \\ -x^{-2} & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x \neq 0 \ , \ x > 0$$

En bas för lösningsrummet är $\{\ x^{-1},\ x^3\ \}$.
Den allmänna lösningen kan skrivas $y(x) = Ax^{-1} + Bx^3$.
Konstanterna bestäms med hjälp av de givna villkoren.
Derivera den allmänna lösningen och då erhålles $y'(x) = -Ax^{-2} + 3Bx^2$.
Insättning av villkoren ger systemet

$$\begin{cases} 3 = y(1) = A + B \\ 5 = y'(1) = -A + 3B \end{cases}$$

Systemets lösning är $A = 1$, $B = 2$.
Den lösning som uppfyller differentialekvationen och de givna begynnelsevillkoren är $y(x) = x^{-1} + 2x^3$.

SVAR: En bas för lösningsrummet är $\{\ x^{-1},\ x^3\ \}$.
Den sökta lösningen är $y(x) = x^{-1} + 2x^3$.

2. Positionen för en partikel ges av systemet

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer.
Vart tar en partikel placerad i punkten $(1, -1)$ vägen efter lång tid ?

…………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Vi bestämmer först matrisens egenvärden och därefter motsvarande egenvektorer. Egenvärdena kan erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

Då matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ är triangulär kan egenvärdena direkt anges.

Egenvärdena är: $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -5$.

Egenvektorerna fås ur ekvationen $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 0 & -5-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$

med aktuellt egenvärde insatt.

$\underline{\lambda_1 = 2}$ ger $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\underline{\lambda_2 = -5}$ ger $\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Två linjärt oberoende lösningar är $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$ och $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}$.

En fundamentalmatris är $\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-5t} \\ 0 & -e^{-5t} \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-5t} \\ 0 & -e^{-5t} \end{pmatrix}\mathbf{C}$ eller $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}$, där

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ är en godtycklig konstant vektor.

En partikel placerad i punkten $(1, -1)$ närmar sig origo, ty punkten $(1, -1)$ ligger på egenvektorn $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ genom origo.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-5t} \\ 0 & -e^{-5t} \end{pmatrix}\mathbf{C}$ eller $\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}$,

där $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ är en godtycklig konstant vektor.

Partikeln närmar sig origo.

3. Studera det icke-linjära systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x^2 + \dfrac{3}{2})y \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + 4y - 1 \end{cases}$ genom att

hitta alla kritiska punkter, bestäm deras typ(nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgöra huruvida de är stabila eller instabila.

Lösningsförslag:

I kritiska punkter är tangentvektorn lika med nollvektorn. Vi får $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} (x^2 + \dfrac{3}{2})y \\ x^2 + 4y - 1 \end{pmatrix}$.

De kritiska punkterna är: $(1,0)$ och $(-1,0)$.

Nu över till bestämning av de stationära punkternas karaktär. Vi linjariserar det icke-linjära systemet.

Först beräknas Jacobimatrisen och därefter insättes respektive stationär punkt.

Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + \frac{3}{2} \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$.

Insättning av $(1,0)$ ger $\mathbf{J}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{2} \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5).$$

Egenvärdena är reella och med olika tecken. Det linjariserade systemet uppvisar en sadelpunkt i $(1,0)$.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

Insättning av $(-1,0)$ ger $\mathbf{J}(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden. $0 = \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{2} \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1$.

Egenvärdena är komplexa och med positiv realdel.

Det linjariserade systemet uppvisar en instabil spiral i $(-1,0)$.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: De kritiska punkterna är $(1,0)$ och $(-1,0)$.

$(1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil. $(-1,0)$ är en instabil spiralpunkt.