Lösningar till KS 1

1\. A a) $\begin{cases} y' = 3y^3 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ separabel diff. ekvation

$$\int \frac{dy}{y^3} = 3\int dx \qquad -\frac{1}{2}y^{-2} = 3x + C_1$$

$$y^{-2} = -6x - 2C_1, \quad (C = -2C_1) \qquad y^2 = \frac{1}{C-6x}$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{C}, \quad C = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{1-6x} \Rightarrow x < \frac{1}{6}.$$ Eftersom $y(0) < 0$, $y = -\frac{1}{\sqrt{1-6x}}$

b) Lösningen är definierad på intervallet $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$.

1\. B a) $\begin{cases} y' = 5y^3 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ löses som ovan $\int \frac{dy}{y^3} = 5\int dx$

$$y^{-2} = -2(5x + C_1) \qquad (C = -2C_1) \qquad y^2 = \frac{1}{C-10x}$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow C = 1$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{1-10x}}$$

b) $\left(-\infty, \frac{1}{10}\right)$.

2\. $y' - \frac{2}{x}y = -x^2y^2$ är Bernoulli's ekvation.

Subst. $v = \frac{1}{y}$. Då är $v'(x) = -\frac{1}{y^2}y'(x)$.

$\Rightarrow y = \frac{1}{v}$, $y' = -y^2v' = -\frac{v'}{v^2}$. Ekvationen blir

$$-\frac{v'}{v^2} - \frac{2}{xv} = -\frac{x^2}{v^2}$$ Multiplikation med v^2 ger

ekvationen $v' + \frac{2}{x}v = x^2$ som är linjär.

Integrerande faktor: $e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$

$x^2v' + 2xv = x^4$ dvs. $\frac{d}{dx}(x^2v) = x^4$

$$\Rightarrow x^2v = \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C_1 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{5x^2}(x^5 + 5C_1)$$

$$y = \frac{1}{v} = \frac{5x^2}{x^5 + 5C_1} \quad (5C_1 = C) \Rightarrow y = \frac{5x^2}{x^5 + C}$$

$y = 0$ är en annan lösning

3\. a) $\begin{cases} F'(t) = 2F(t) - h \\ F(0) = 7 \cdot 10^6 \end{cases}$

b) $\int \frac{dF}{2F - h} = \int dt \qquad \frac{1}{2}\ln|2F - h| = t + C_1$

$$2F - h = \pm e^{2t + 2C_1} = \pm e^{2C_1} e^{2t}$$

$$F(t) = \frac{h}{2} + Ce^{2t} \qquad \left(C = \pm\frac{1}{2}e^{2C_1}\right)$$

$$\begin{cases} F(0) = 7 \cdot 10^6 \\ h = 15 \cdot 10^6 \end{cases} \Rightarrow C = \left(7 - \frac{15}{2}\right)\cdot 10^6 = -0{,}5\cdot 10^6$$

$$F(t) = 7{,}5\cdot 10^6 - 0{,}5\cdot 10^6 e^{2t}$$

$$F(t) = 0 \iff e^{2t} = \frac{7{,}5}{0{,}5} = 15$$

Fiskarterna dör ut om $t = \frac{1}{2}\ln 15 \sim 1{,}35$ år

c) $F'(t) = 0 \iff 2F(t) - h = 0 \iff h = 2F(t)$

h är konstant $\Rightarrow$ h kan vara högst $= 2F(0) = 14 \cdot 10^6$ ton/år