Lösningar till KS 2

1. Vi söker lösning på formen $x = v(t)e^t$.

Då är $x' = (v'+v)e^t$, $x'' = (v''+2v'+v)e^t$.

Insättning i ekvationen $tx'' - (t+1)x' + x = 0$ ger

$$t(v''+2v'+v)e^t - (t+1)(v'+v)e^t + ve^t = 0$$

$\Rightarrow tv'' + (t-1)v' = 0$. Låt $u = v'$.

$tu' + (t-1)u = 0$. Ekvationen är separabel.

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{1-t}{t}\,dt, \quad \ln|u| = \ln|t| - t + C_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{u}{t}\right| = C_1 - t \Rightarrow u = C_2 t e^{-t} \qquad (C_2 = \pm e^{C_1})$$

$u = v' \Rightarrow v(t) = -C_2(t+1)e^{-t} + C_3$.

Den allmänna lösningen är $x(t) = C_3 e^t - C_2(t+1)$.

2. B. Egenvärden till matrisen $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & -1\end{pmatrix}$ fås ur ekvationen $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -5 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0$ dvs. $\lambda^2 + 9 = 0$, $\lambda = \pm 3i$.

Vi bestämmer egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 3i$.

$$\begin{pmatrix}1-3i & 2\\ -5 & -1-3i\end{pmatrix} \cdot (1-3i) \quad \begin{pmatrix}1-3i & 2\\ -5(1-3i) & -10\end{pmatrix} \xrightarrow{5} \begin{pmatrix}1-3i & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (1-3i)x + 2y = 0$ $\quad \begin{cases} x = 2s \\ y = -(1-3i)s \end{cases}$ Vi får lösningen

$$X(t) = \begin{pmatrix}2\\ -1+3i\end{pmatrix} e^{3it} = \begin{pmatrix}2(\cos 3t + i\sin 3t)\\ (-1+3i)(\cos 3t + i \sin 3t)\end{pmatrix} = \operatorname{Re} X(t) + i \operatorname{Im} X(t),$$

$$\operatorname{Re} X(t) = \begin{pmatrix}2\cos 3t\\ -\cos 3t - 3\sin 3t\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} X(t) = \begin{pmatrix}2\sin 3t\\ 3\cos 3t - \sin 3t\end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är $X(t) = C_1 \operatorname{Re} X(t) + C_2 \operatorname{Im} X(t)$.

Begynnelsevillkoret är $X(0) = \begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$C_1\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix} \text{ dvs. } \begin{cases} 2C_1 = 1 \\ -C_1 + 3C_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

v. g. vänd

Lösningen är
$$X(t) = \begin{pmatrix}\cos 3t - 3\sin 3t\\ -\frac{1}{2}(\cos 3t + 3\sin 3t) - \frac{3}{2}(3\cos 3t - \sin 3t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 3t - 3\sin 3t\\ -5\cos 3t\end{pmatrix}$$

2. A Egenvärden till $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & -1\end{pmatrix}$ är $\pm 2i$.

Egenvektorerna för egenvärdet $2i$ uppfyller ekvationen $(A - 2iI)X = \bar{0}$ där $X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1-2i & 1\\ -5 & -1-2i\end{pmatrix} \cdot (1-2i) \quad \begin{pmatrix}1-2i & 1\\ -5(1-2i) & -5\end{pmatrix} \xrightarrow{5} \begin{pmatrix}1-2i & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (1-2i)x + y = 0$ $\quad \begin{cases} x = s \\ y = (-1+2i)s \end{cases}$. Motsvarande lösning är

$$X(t) = \begin{pmatrix}1\\ -1+2i\end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix}1\\ -1+2i\end{pmatrix}(\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$= \begin{pmatrix}\cos 2t + i\sin 2t\\ -\cos 2t - 2\sin 2t + i(2\cos 2t - \sin 2t)\end{pmatrix} = \operatorname{Re} X(t) + i \operatorname{Im} X(t).$$

Den allmänna lösningen $X(t) = C_1\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\cos 2t - 2\sin 2t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}\sin 2t\\ 2\cos 2t - \sin 2t\end{pmatrix}$

$X(0) = \begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = \frac{3}{2}$.

Lösningen är $X(t) = \begin{pmatrix}3\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\\ -\frac{15}{2}\sin 2t\end{pmatrix}$.

3. För matrisen $\begin{pmatrix}1 & a-4\\ a+4 & -7\end{pmatrix}$ är $\tau = 1 - 7 = -6$,

$\Delta = -7 - (a^2 - 16) = 9 - a^2$ och $\tau^2 - 4\Delta = 4a^2$.

Om $a = 0$ $\quad \begin{cases} \tau^2 - 4\Delta = 0 \\ \tau < 0 \end{cases}$. Origo är en stabil degenererad nod.

Antag att $a \neq 0$. Då är $\tau^2 - 4\Delta > 0$.

Om $-3 < a < 3$, $a \neq 0$ så är $\Delta > 0$. Eftersom $\tau < 0$, origo är en stabil nod.

Om $a < -3$ eller $a > 3$ så är $\Delta < 0$. Origo är då en sadelpunkt. Den är en instabil kritisk punkt.