Lösningar till KS 3

1. a) $f(t) = t(1-\mathcal{U}(t-3)) = t - (t-3)\mathcal{U}(t-3) - 3\,\mathcal{U}(t-3)$

Enligt Beta $\mathcal{L}\{f(t)\} = \underline{\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-3s}}{s^2} - 3\dfrac{e^{-3s}}{s}}$

b) Låt $H(s) = \dfrac{s}{s^2+2s+3} = \dfrac{s+1-1}{(s+1)^2+2}$

$= \dfrac{s+1}{(s+1)^2+2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2} = \mathcal{L}\{h(t)\}$ där

$h(t) = e^{-t}\left(\cos\sqrt{2}\,t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,t\right).$

$F(s) = H(s)\,G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ där $f(t) = (h*g)(t)$

$= \displaystyle\int_0^t h(v)\,g(t-v)\,dv = \underline{\int_0^t e^{-v}\left(\cos\sqrt{2}\,v - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,v\right)g(t-v)\,dv}.$

---

2. Låt $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$. Då är

$y^2X'Y = x^2XY' \Rightarrow \dfrac{X'}{x^2X} = \dfrac{Y'}{y^2Y} = \lambda = \text{konstant}$

$\dfrac{X'}{X} = \lambda x^2$ har lösningarna $X = C_1 e^{\frac{\lambda}{3}x^3}$,

$\dfrac{Y'}{Y} = \lambda y^2$ — " — $Y = C_2 e^{\frac{\lambda}{3}y^3}$

$\Rightarrow \underline{u(x,y) = Ce^{a(x^3+y^3)}}$ där a och C är godt. konstanter.

---

3. Sinusserien för $f(x) = 1$, $0 < x < \pi$ är (Beta)

$f(x) \sim \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}\sin nx$

När $t=0$ $\quad u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \Rightarrow \underline{c_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n}}$

$c_{2k} = 0, \quad c_{2k-1} = \dfrac{4}{\pi(2k-1)} \quad k = 1, 2, \ldots$

$c_1 = \dfrac{4}{\pi}, \quad c_3 = \dfrac{4}{3\pi}, \ldots$

$u(x,t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}e^{-(2k-1)^2t}\sin(2k-1)x$

$= \underline{\dfrac{4}{\pi}\left(e^{-t}\sin x + \frac{1}{3}e^{-9t}\sin 3x + \cdots\right)}$