SF1643 Tal och Funktioner
Maria Saprykina

Facit/Ledningar till Extrauppgifter, del II

(1) Beräkna $\cos \dfrac{4711\pi}{3}$.
Svar: $1/2$.

(2) Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\cos x = 1/2$.
Svar: $x = \pm\pi/3 + n2\pi$, n godtyckligt heltal.

(3) Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\sin x = 1/2$.
Svar: $x = \pi/6 + n2\pi$, n godtyckligt heltal eller $x = 5\pi/6 + n2\pi$, n godtyckligt heltal.

(4) Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\cos(4x + \pi/3) = \cos(-32\pi/3)$.
Svar: $x = \pi/12 + n\pi/2$, n godtyckligt heltal eller $x = \pi/4 + n\pi/2$, n godtyckligt heltal.

(5) Utgå från formeln $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ och härled formeln $\sin 2v = (1 - \cos 2v)/2$.

(6) Låt $z = \sqrt{3} + i$. Skriv z på polär form och beräkna sedan z^{10} och $1/z^4$. Svaren ska ges på formen $a + ib$.
Svar: $z = 2e^{i\pi/6}$ och $z^{10} = 1024e^{10i\pi/6} = 512 - 512\sqrt{3}i$, och $1/z^4 = -1/32 - (\sqrt{3}/32)i$.

(7) Om z är som i föregående uppgift och $w = 2i$, vad är realdelen av w^9/z^7?
Svar: -2.

(8) Bestäm $\cos v$ och $\tan v$ om $\pi/2 < v < \pi$ och $\sin v = 1/7$.
Svar: $\cos v = -\sqrt{48}/7$ och $\tan v = -1/\sqrt{48}$.

(9) Bestäm $\cos x$ om $\sin^2 x = 1/3$ och $\pi/2 < x < \pi$.
Svar: $-\sqrt{2/3}$.

(10) Skriv upp exakt fem olika lösningar till ekvationen $\sin 3x = -1/\sqrt{2}$.
Svar: Välj till exempel fem av lösningarna $x = -\pi/12 + k2\pi/3$, k heltal (det finns ännu fler). Dvs sätt in fem olika specifika heltal istället för k.

(11) Lös ekvationen $\sin 2x = \cos x$.
Svar: $x = \pi/2 + k\pi$, k heltal, eller $x = \pi/6 + k2\pi$, k heltal, eller $x = 5\pi/6 + k2\pi$, k heltal.

(12) Bestäm det största och det minsta värde som uttrycket $a \cos x + b \sin x$ kan anta. Svaret kommer förstås att innehålla de rella talen a och b.
Svar: $\sqrt{a^2 + b^2}$ är största och $-\sqrt{a^2 + b^2}$ är minsta värdet.

(13) Bevisa med induktion att $4^{2n+1} + 3^{2+n}$ är jämnt delbart med 13 för alla positiva heltal n.

(14) Vi definierar en följd av tal, a_1, a_2, $a_3 \ldots$ genom att först sätta $a_1 = 1$, och därefter för alla heltal $n > 1$ sätta $a_{n+1} = 3a_n/(a_n + 1)$. Bevisa med induktion att $a_n < 2$ för alla heltal $n \geq 1$.

Facit/Ledningar till Blandade uppgifter inför tentan

1. Facit/Ledningar till Blandade uppgifter inför tentan

(1) Låt $f(x) = \ln|2x + \sqrt{4x^2 + 9}| + \ln|2x - \sqrt{4x^2 + 9}|$. Bestäm definitionsmängd och värdemängd till f och rita kurvan $y = f(x)$.

Svar: $D(f) = \mathbb{R}$ och $V(f) = \{\ln 9\}$, kurvan det frågas efter är linjen $y = \ln 9$ (kolla först vilka x man kan stoppa in i de båda logaritmarna och använd sedan loglagar för att skriva om och förenkla).

(2) Finn alla reella lösningar till ekvationen $x^3 + x^2 - 5x = 5$.
Svar: $x = -1, \pm\sqrt{5}$. Skriv om på formen $p(x) = 0$ (dvs flytta över femman), gissa roten -1 och dividera sedan bort faktorn $x + 1$ och sök nollställen till den kvot som återstår.

(3) Bestäm alla reella tal x som uppfyller att $\left|\frac{x-2}{x-3}\right| \leq \frac{1}{2}$.
Svar: $1 \leq x \leq 7/3$.

(4) Bestäm konstanta termen (den som inte innehåller x) i utvecklingen av $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{14}$.
Svar: -439296.

(5) Lös olikheten $\frac{x+3}{x-1} < \frac{x+1}{x-3}$.
Svar: Alla $x < 1$ och alla $x > 3$ (och inga andra) uppfyller olikheten.

(6) För vilka reella tal x är det sant att $\frac{12-10x-2x^2}{x^2-10x-11} \geq 0$?
Svar: Det är sant för alla x sådana att $-6 \leq x < -1$ och för alla x sådana att $1 \leq x < 11$.

(7) Låt $z = 2e^{i\pi/3}$ och $w = 3e^{-i7\pi/6}$. Bestäm imaginärdelen av $\frac{\bar{z}^4}{w^3}$.
Svar: $8/27$.

(8) Betrakta påståendet $|x - 5| \leq 1 \Rightarrow |x^2 - 1| \leq 5$. Bevisa att det är sant eller bevisa att det är falskt.
Svar: Falskt

(9) Är det sant eller falskt att $(11n - 1)$ är jämnt delbart med 5 för alla positiva heltal n? Bevisa att det är sant eller bevisa att det är falskt.
Svar: Sant. Använd induktion.

(10) Bestäm definitionsmängd och värdemängd till $f(x) = \ln(-(x + 4)(x - 3))$ och avgör om f har invers.
Svar: $D(f)$ är intervallet $-4 < x < 3$ och $V(f)$ är intervallet $-1 < x \leq \ln 12,25$. Invers saknas.

(11) Avgör vilka vinklar v i intervallet $\pi/2 < v < 3\pi/2$ som uppfyller att $\sin(2v + \pi/6) = 1/2$.
Svar: $v = \pi$ och $v = 4\pi/3$.

(12) Finn alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{24 - 2x} = x$.
Svar: $x = 4$.

(13) Vad är koefficienten framför x^7 i polynomet $p(x) = (3x + 2)^9$?
Svar: 314928

(14) Förenkla så långt som möjligt uttrycket $\frac{\ln(e^x)^2 \ln\sqrt{e^{x^2}}}{xe^{\ln(\ln x)}}$.
Svar: $x^2/\ln x$.

(15) Beräkna summorna $\sum_{k=2}^{50} 5(2k + 2)$ och $\sum_{k=2}^{10}(2k + 2^k)$.
Svar: 13230 och 2152.

(16) Avgör om det är sant att $f(x) = e^{2x}$ har inversen $g(x) = \frac{1}{2}\ln x$.
Svar: Sant!

(17) Bevisa att för alla komplexa tal z gäller att $|z|^2 = \bar{z}z$.
Svar: Sätt $z = a + ib$ och räkna på.

(18) Finn alla reella tal x som löser ekvationen $1 + \cos x + \cos 2x = 0$.

Svar: $x = \pi/2 + n\pi$, n heltal och $x = \pm 2\pi/3 + n2\pi$, n heltal, löser ekvationen.

(19) Vilka vinklar v uppfyller att $\cos^4 v - \sin^4 v = \cos 2v$?
Svar: Alla.

(20) Om du vet att för två vinklar u och v gäller att $\tan u = \tan v$, vad kan du då säga om u och v?
Svar: $u = v + n\pi$, n heltal.

(21) Lös ekvationen $\tan x = \sin x$.
Svar: $x = n\pi$, n heltal

(22) Lös ekvationen $\cos(73x + \pi) = \sqrt{2}/2$.
Svar: $x = -5\pi/292 + n2\pi/73$ eller $x = -3\pi/292 + n2\pi/73$.

(23) Lös ekvationen $\sin 3x = -\sqrt{3}/2$.
Svar: $x = -\pi/9 + n2\pi/3$ eller $x = -2\pi/9 + n2\pi/3$.

(24) Beräkna $\cos(1593\pi/6)$.
Svar: 0.

(25) Höjden y över havet (i meter) hos en viss spärrballong varierar med tiden t (i timmar) enligt formeln $y = ct + d$ för några konstanter c och d. Vid tidpunkten $t = 0$ var höjden exakt 1000 meter, och en timme senare var höjden 997 meter. Beräkna talen c och d och avgör när ballongen når havsytan.

(26) Är det sant att $\ln 4711 - \ln 4709 = \ln 2$?

(27) Är det sant att $23 = \ln e^{\ln 23}$?

(28) Lös ekvationen $\frac{1}{\ln x} = \ln x$.

(29) Lös ekvationen $\ln x = 1 - \ln(x + 3)$.

(30) Lös olikheten $5 + 4e^x - e^{2x} > 0$.

(31) Lös ekvationen $9^{1-x} = 3^x$.

(32) I landet där alla invånare antingen talar sanning hela tiden eller ljuger hela tiden stöter du på ett par urinvånare som heter Artil och Bertil. Artil säger: Jag talar alltid sanning. Bertil säger: Nej nej, vi är båda två ena riktiga lögnare! Vem ska man tro på?

(33) Beräkna $\binom{82}{50} - \binom{82}{32}$.

(34) Beräkna $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \cdots + \binom{9}{9}$.

(35) Lös den komplexa andragradsekvationen $z^2 + 2z + i = 0$.
Se sid 459 i boken.

(36) Ni får veta att z^2 har absolutbelopp 4 och argument 2/3. Vad kan z vara?

(37) Finn alla komplexa tal z som uppfyller att $z^3 = 27i$. Binomisk ekvation.
Se sid 461-463 i boken.