

**Ledningar/Svar till Extrauppgifter, del I
(repetition inför KS)**

- (1) Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 - 7x + 6$ i faktorer av grad 1.
Svar: $p(x) = (x + 3)(x - 2)(x - 1)$
- (2) Lös ekvationen $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x-1}} = x - 2$.
Svar: $x = 3$ och $x = 2$
- (3) Är $\{x \in \mathbb{R}; 0 < |2x - 1| \leq 2\}$ ett intervall?
Svar: Nej.
- (4) Vid tillverkning av en viss järnstång är kravet att stångens längd L vid rumstemperatur ska uppfylla $|1,97 - L| \leq 0,05$. Vilka värden på L duger?
Tips: formulera olikheten i termer av avstånd och rita in de möjliga värdena på reella linjen. Ledning: se sid 43 i boken.
- (5) För vilka reella tal x gäller olikheten $0 < |x - 1| < 3$?
Tips: gör som i föregående uppgift. Ledning: se sid 43 i boken.
- (6) Finn alla reella tal x som uppfyller att $|2x - 1| + |x + 3| = 5$.
Tips: dela upp lösningen i olika fall! Svar: $x = \pm 1$.
- (7) Lös olikheten $\frac{2x-8}{x+2} > \frac{x-5}{x+1}$.
- (8) Lös ekvationen $\left| \frac{2x+1}{x+2} \right| = 1$.
Svar: $x = \pm 1$
- (9) Finn alla x som uppfyller olikheten $\left| \frac{2x+1}{3x-5} \right| \geq 1$.
Svar: Olikheten är uppfylld om $4/5 \leq x < 5/3$ eller $5/3 < x \leq 6$.
- (10) Påstående: För alla reella tal x gäller att $x(x - 2) \leq -1$. Är påståendet sant eller falskt?
Ge bevis eller motexempel!
Svar: Sant.
- (11) Påstående: För alla positiva reella tal x och y gäller olikheten $\frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} \geq 2$. Är påståendet sant eller falskt? Ge bevis eller motexempel!
Svar: Falskt.
- (12) Bestäm en ekvation för den linje genom $(1, -3)$ som är vinkelrät mot linjen med ekvation $3x - 4y + 5 = 0$.
Svar: $4x + 3y + 5 = 0$.
- (13) Avgör om det är sant att $x^2 + 3x + 1 > 0$ medför $x + 1 > 5$.
Svar: Falskt. (Kolla bara vad som händer om $x = 0$.)
- (14) Lös olikheten $x^4 - 2x < x^2 - 2$.
Svar: Inga x uppfyller denna olikhet. (Flytta över allt till vänster sida och faktorisera det polynom som då står där (gissa en rot och dividera bort den faktorn etc.) och få att olikheten är ekvivalent med $(x - 1)^2(x^2 + 2x + 2) < 0$ vilket aldrig kan hända.)
- (15) Lös för alla värden på den reella konstanten a ekvationen $x + a = ax - 1$.
Svar: Om $a = 1$ saknas lösning. För alla andra värden på a är lösningen $x = \frac{a+1}{a-1}$.

- (16) Utför polynomdivisionen $\frac{x^3+3x^2-45x-175}{x-7}$. Kan man använda svaret för att faktorisera täljaren? Hur?
Se sidorna 54-56 i boken.
- (17) Ett andragradspolynom som har nollställena a och b kan skrivas $(x-a)(x-b)$. Skriv detta polynom på standardform och uttryck näst högsta koefficienten (den framför x) och konstanta termen med hjälp av a och b . Hur blir det för tredjegradspolynom?
- (18) Konstruera ett andragradspolynom som har $x = 3$ och $x = -4$ som nollställen. Skriv polynomet på standardform och jämför med svaret på förra uppgiften.
Se sidorna 54-56 i boken.
- (19) Beräkna summan $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{2k}$.
Svar: $255/256$
- (20) Beräkna summan $\sum_{k=1}^8 2^k$.
Svar: 510
- (21) Beräkna summan $\sum_{j=2}^{64} (k+2j)$.
Svar: $63k + 4158$.
- (22) Vi har ett polynom $p(x) = (2x + \frac{1}{2})^7$. Vad är koefficienten framför x^2 ?
Svar: $21/8$
- (23) Bestäm konstanta termen (den som inte innehåller x) i utvecklingen av $(2x^3 - \frac{1}{3x^2})^5$.
Svar: $-40/27$.
- (24) Vilka av nedanstående påståenden är sanna?
(a) $\ln e^{\ln 3} = 3$;
(b) $\ln e^{\sin^2 x} + \ln e^{\cos^2 x} = 1$ för alla reella tal x ;
(c) $e^{2x} = (e^x)^2$ för alla tal x ;
(d) $\ln ab - \ln b = \ln a$ för alla positiva reella tal a, b ;
(e) $\ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{a} = 0$ för alla positiva reella tal a, b .
Svar: falskt, sant, falskt, sant, sant.
- (25) Finn alla reella tal x som löser ekvationen $\ln x + \ln(x+1) = \ln(x+2)$.
Svar: $x = \sqrt{2}$ (ej minus!)
- (26) Finn alla reella tal x som löser ekvationen $e^x + e^{x/2} = 1$.
Svar: $x = \ln((3 - \sqrt{5})/2)$.
- (27) Förenkla så långt som möjligt uttrycket $\frac{(2^{1/6})^2(\sqrt{8})^3}{2^{1/4}\sqrt{32}}$.
Svar: $2^{25/12}$.
- (28) För vilka reella tal a, b är det sant att $a^{\ln b} = b^{\ln a}$?
Svar: För alla positiva reella a och b .