KTH Matematik

SF1643 Tal och funktioner. Lappskrivning 15/9-2009, version B.

Lösningsförslag

1. Lös olikheten $\dfrac{6}{x-1} \geq -x-4$.

$$\frac{6}{x-1} \geq -x-4 \Leftrightarrow \frac{6}{x-1}+x+4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6+(x+4)(x-1)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x^2+3x+2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+1)}{x-1} \geq 0$$

Vi gör en teckentabell för att analysera det sista uttrycket.

x		-2		-1		1	
$x+2$	-	0	+		+		+
$x+1$	-		-	0	+		+
$x-1$	-		-		-	0	+
$\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$	-	0	+	0	-	ej def.	+

Således, olikheten är uppfylld för $-2 \leq x \leq -1$ och $1 < x < \infty$.

2. Lös ekvationen $\ln x + \ln(x+1) = \ln(x+2)$.

Ekvationen skrivs om som: $\ln x(x+1) = \ln(x+2)$. Genom att finktionen $\ln x$ är injektiv, så är den ekvivalent med $x(x+1) = (x+2)$. Vi har:

$$x(x+1) = (x+2) \Leftrightarrow x^2+x = x+2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Verifiera: $\ln\sqrt{2}$, $\ln(\sqrt{2}+1)$, $\ln(\sqrt{2}+2)$ äro definierade, därför är $\sqrt{2}$ en lösning.
$\ln(-\sqrt{2})$ ej definierad, därför är $-\sqrt{2}$ ingen lösning.
Svar: $x = \sqrt{2}$.

3. Beräkna summan $\displaystyle\sum_{j=2}^{10}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^j + 3j\right)$.

Obs. att $\sum_{j=2}^{10}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^j + 3j\right) = \sum_{j=2}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^j + 3\sum_{j=2}^{10} j$. Den första summan är geometrisk, den andra är aritmetisk.

$$\sum_{j=2}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$2^{-2}\left(1+2^{-1}+\cdots+2^{-8}\right) = 2^{-2}\left(\frac{1-2^{-9}}{1-1/2}\right) = \frac{1}{2}(1-2^{-9}).$$

$$\sum_{j=2}^{10} j = \frac{9(2+10)}{2} = 54$$

Svar: $\frac{1}{2}(1-2^{-9}) + 162$.