KTH Matematik

SF1643 Tal och funktioner. Lappskrivning 15/9-2009, version B.

Lösningsförslag

1. Lös ekvationen $\ln x + \ln(x+1) = \ln(x+5)$.

Ekvationen skrivs om som: $\ln x(x+1) = \ln(x+5)$. Genom att finktionen $\ln x$ är injektiv, så är den ekvivalent med $x(x+1) = (x+5)$. Vi har:

$$x(x+1) = (x+5) \Leftrightarrow x^2 + x = x + 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

Verifiera: $\ln\sqrt{5}$, $\ln(\sqrt{5}+1)$, $\ln(\sqrt{5}+5)$ äro definierade, därför är $\sqrt{5}$ en lösning.

$\ln(-\sqrt{5})$ ej definierad, därför är $-\sqrt{5}$ ingen lösning.

Svar: $x = \sqrt{5}$.

2. Lös olikheten $\dfrac{2}{x-1} \leq x$.

$$\frac{2}{x-1} \leq x \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - x(x-1)}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{-x^2 + x + 2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} \geq 0$$

Vi gör en teckentabell för att analysera det sista uttrycket.

x		-1		1		2	
$x+1$	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-	0	+
$\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$	-	0	+	ej def.	-	0	+

Således, olikheten är uppfylld för $-1 \leq x < 1$ och $2 \leq x < \infty$.

3. Beräkna summan $\displaystyle\sum_{j=2}^{10} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^j + 2j \right)$.

Obs. att $\sum_{j=2}^{10} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^j + 2j \right) = \sum_{j=2}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^j + 2\sum_{j=2}^{10} j$. Den första summan är geometrisk, den andra är aritmetisk.

$$\sum_{j=2}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10} =$$

$$3^{-2}\left(1 + 3^{-1} + \cdots + 3^{-8}\right) = 3^{-2}\left(\frac{1 - 3^{-9}}{1 - 3^{-1}}\right) = \frac{1}{6}(1 - 3^{-9}).$$

$$\sum_{j=2}^{10} j = \frac{9(2+10)}{2} = 54$$

Svar: $\frac{1}{6}(1 - 3^{-9}) + 108$.