KTH Matematik

Tentamen i SF1643 Tal och Funktioner
14 januari 2010

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg E (godkänt), D, C, B, A krävs minst 12, 15, 18, 20 repektive 22 poäng inklusive eventuella bonuspoäng. Om 10 – 11 poäng uppnås finns möjlighet att komplettera inom fyra veckor. Kontakta i så fall kursledaren.

LYCKA TILL!

1. Lös ekvationen $\ln x - \ln \dfrac{2}{x} = \ln(x+4)$.

Lösning. Eftersom $\ln x - \ln \frac{2}{x} = \ln \frac{x^2}{2}$, ekvationen ovan ger: $\ln \frac{x^2}{2} = \ln(x+4) \Leftrightarrow x^2 = 2(x+4) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ eller $x = -2$. Verifierar lösningarna: för $x = 4$ stämmer ekvationen, och därför $x = 4$ är en lösning; för $x = -2$ är $\ln x$ ej definierad, och -2 är ingen lösning.

2. a) Förenkla: $\sqrt{\dfrac{9}{3^4}} = \sqrt{\dfrac{1}{3^2}} = \dfrac{1}{3}$.

b) Hitta ett komplext tal z som uppfyller ekvationen $z \cdot (2i+3) = 1$.
Lösning. $z = \frac{1}{2i+3} = \frac{(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - i\frac{2}{13}$.

c) Beräkna: $\displaystyle\sum_{k=5}^{25} \frac{k}{5} = \frac{1}{5}\sum_{k=5}^{25} k = \frac{1}{5}\left((5+6+7+\cdots+25)+(25+24+\cdots+5)\right)/2 = \frac{1}{5}21(5+25)/2 = 63.$

3. a) Lös ekvationen $2^{2x} + 2^x = 6$.

Lösning. Beteckna $y = 2^x$. Ekvationen blir: $y^2 + y - 6 = 0$. Denna har lösningar $y = 2$ eller $y = -3$. I termer av x koordinaten har vi: $2^x = 2$, dvs, $x = 1$; den andra lösningen ger: $2^x = -3$, vilket är omöjligt. Den enda lösningen är alltså $x = 1$.

b) Lös ekvationen $\sqrt{5+2x} = 1 + x$.
Lösning. Kvadrerar: $5 + 2x = (1+x)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ eller $x = -2$. Verifierar: för $x = 2$ har vi: $\sqrt{9} = 3$ stämmer; för $x = -2$ har vi $\sqrt{1} = -1$, stämmer ej.

c) Bestäm samtliga rötter till $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Lösning. Ekvationen ovan har 2 serier av lösningar:
$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k heltal, vilket ger $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$, k heltal, och

$2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k heltal, vilket ger $x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$, k heltal.

4. Lös olikheten $\dfrac{6}{x+1} \leq 4 - x$.

Lösning. Olikheten är ekvivalent med $\frac{6+(x-4)(x+1)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} \leq 0$. Vi gör en teckentabell för att analysera det sista uttrycket.

x		-1		1		2	
$x+1$	-	0	+		+		+
$x-1$	-		-	0	+		+
$x-2$	-		-		-	0	+
$\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$	-	ej def.	+	0	-	0	+

Svar: olikheten är uppfylld om $x < -1$ eller $1 \leq x \leq 2$.

5. Bestäm alla reella tal x som uppfyller att $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) = 1$ och $\tan x < 0$.

Lösning. Obs. att $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$. Ekvationen ovan kan skrivas om som $\sin 3x = 1$. Denna har lösningar: $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k heltal. Därför $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$, k heltal. Vi kan dela upp denna följd av lösningar i tre delföljder (rita på enhetscirkeln!):

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k heltal,
$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k heltal,
$x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} + 2\pi k = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k heltal.

Verifierar det andra villkoret, dvs, $\tan x < 0$, för våra lösningar:

$\tan(\frac{\pi}{6} + 2\pi k) = \tan(\frac{\pi}{6}) > 0$,
$\tan(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k) = \tan(\frac{5\pi}{6}) < 0$,
$\tan(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k) = \tan(\frac{3\pi}{2})$ ej definierad.

Svar: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, k heltal

6. Bevisa med hjälp av induktion att $7^n + 5$ är jämnt delbart med 6 för varje $n \geq 1$.

Lösning. 1. Verifierar basen för induktionen: $7 + 5 = 12$ är jämnt delbart med 6—rätt.
Antag att för något k gäller att $7^k + 5$ är jämnt delbart med 6. Det betyder att $7^k + 5 = 6p$ för något heltal p. Med hjälp av detta antagande behöver vi visa att $7^{k+1} + 5$ är jämnt delbart med 6, dvs att $7^{k+1} + 5 = 6q$ för något heltal q.

$$7^{k+1} + 5 = 7 \cdot 7^k + 35 - 35 + 5 = 7(7^k + 5) - 30 = 7(6p) - 6 \cdot 5 = 6(7p - 5).$$

Detta tal är jämnt delbart med 6 eftersom $(7p - 5)$ är ett heltal.

Enligt induktionsprincipen, är $7^n + 5$ jämnt delbart med 6 för varje $n \geq 1$.

7. Bestäm alla komplexa rötter till ekvationen $z^8 = 2$. Skriv rötterna på formen $a + bi$ (d.v.s., på rektangulär form).

Lösning. Sök z på formen $z = re^{i\theta}$:

$$(re^{i\theta})^8 = r^8 e^{i8\theta} = 2 = 2e^{i\cdot 0}.$$

Det ger oss:

$$r = 2^{\frac{1}{8}}, \quad 8\theta = 0 + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 7 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 7.$$

På rektangulär form:

$z_0 = 2^{\frac{1}{8}} e^0 = 2^{\frac{1}{8}}$,
$z_1 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\pi/4} = 2^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2^{\frac{1}{8}}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$,
$z_2 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\pi/2} = 2^{\frac{1}{8}} i$,
$z_3 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i3\pi/4} = 2^{\frac{1}{8}}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$,
$z_4 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\pi/2} = -2^{\frac{1}{8}}$,
$z_5 = 2^{\frac{1}{8}}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$,
$z_6 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\pi/2} = -2^{\frac{1}{8}} i$,
$z_7 = 2^{\frac{1}{8}}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$.

8. Bestäm koefficienten vid x^7 i utvecklingen av $\left(x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^8$.

Lösning. Enligt Binomialsatsen, $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (x^2)^k \left(-\frac{3}{x}\right)^{8-k} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^{2k-(8-k)}(-3)^{8-k} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^{3k-8}(-3)^{8-k}$.
Vi får termen som innehåller x^7 om $3k - 8 = 7$, dvs $k = 5$. Denna term har formen $\binom{8}{5}(-3)^{8-5}x^7$.
Koefficienten vid x^7 är

$$\binom{8}{5}(-3)^3 = \frac{8!}{5!3!}(-3)^3 = -\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} 3^3 = -1512$$