KTH Matematik

SF1643 Tal och funktioner. Lappskrivning 16/10-2008, version A.

Namn och personnummer:

1. Lös ekvationen $|x+1|+2x=7$.
2. Visa med hjälp av induktion att
$$\sum_{j=0}^{n} 5^j = \frac{5^{n+1}-1}{4} \quad \text{för } n = 1,2,3,\ldots.$$
3. Lös ekvationen $2^x + 2^{x+2} = 25$.

LYCKA TILL!

Förslag på lösningar.

1. Vi delar upp i två fall.

$x \le -1$: I detta fall är $x+1 \le 0$ och ekvationen är ekvivalent med
$$-(x+1)+2x = 7 \Longleftrightarrow x = 8.$$
Talet 8 ligger inte i det betraktade intevallet. Alltså finns det ingen lösning i detta fall.

$x \ge -1$: Här är $x+1 \ge 0$ och ekvationen är ekvivalent med
$$(x+1)+2x = 7 \Longleftrightarrow x = 2.$$
I intevallet $x \ge -1$ är alltså $x=2$ en lösning.

Således, den givna ekvationen har den enda lösningen $x=2$.

2. Låt $P(n)$ vara påståendet att $\sum_{j=0}^{n} 5^j = \frac{5^{n+1}-1}{4}$.

Bassteg: För $n=1$ har vi $1+5 = \frac{5^2-1}{4}$ vilket stämmer, dvs $P(1)$ gäller.
Induktionssteg: Vi vill nu visa att för varje $m \ge 1$ gäller att $P(m) \Rightarrow P(m+1)$.
Antag att $P(m)$ gäller för något $m \ge 1$, dvs antag att
$$\sum_{j=0}^{m} 5^j = \frac{5^{m+1}-1}{4}.$$
Vi ska nu visa att då gäller också $P(m+1)$. Vi har
$$\sum_{j=0}^{m+1} 5^j = \sum_{j=0}^{m} 5^j + 5^{m+1} = [\text{ind.ant.}] = \frac{5^{m+1}-1}{4} + 5^{m+1} = \frac{5^{m+1}-1+4\cdot 5^{m+1}}{4} = \frac{5^{m+2}-1}{4}.$$
Detta är precis vad vi ville bevisa.

Således följer det från induktionsprincipen att $P(n)$ gäller för alla $n \ge 1$.

3. Vi har $2^x + 2^{x+2} = 2^x + 4\cdot 2^x = 5\cdot 2^x$, så ekvationen kan skrivas
$$5\cdot 2^x = 25 \Longleftrightarrow 2^x = 5 \Longleftrightarrow \ln(2^x) = \ln 5 \Longleftrightarrow x\ln 2 = \ln 5 \Longleftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}.$$
Ekvationen har alltså den unika lösningen $x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$.