KTH, Matematik
Maria Saprykina

Tentamen i SF1643 Tal och Funktioner
24 augusti 2011

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. För betyg E (godkänt), D, C, B, A krävs minst 12, 15, 18, 20 repektive 22 poäng. Om 10 – 11 poäng uppnås finns möjlighet att komplettera inom fyra veckor. Kontakta i så fall kursledaren.

1. Lös ekvationen $\sqrt{2x^2-1} = x-2$.

Lösning: Vi kvadrerar och får: $2x^2-1 = (x-2)^2 = x^2-4x+4$, som är ekvivalent med $x^2+4x-5 = (x-1)(x+5) = 0$. Denna ekvation har två lösningar: $x = 1$ och $x = -5$. Sätter in $x = 1$ i den ursprungliga ekvationen: Vänster $\neq$ Höger, så $x = -1$ är ingen lösning till ekvationen. På samma sätt visar man att $x = -5$ inte är lösning till ekvationen. Svar: inga lösningar.

2. a) Beräkna $\binom{n}{k}/\binom{n}{n-k}$.

Lösning: $\binom{n}{k}/\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}/\frac{n!}{(n-k)!k!} = 1$.

b) Hitta ett komplext tal z som uppfyller ekvationen $z\cdot(i+2) = 3$.

Lösning: $z = \frac{3}{i+2} = \frac{3(2-i)}{(i+2)(2-i)} = \frac{6-3i}{5} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$

c) Beräkna: $\displaystyle\sum_{k=5}^{100} \frac{k}{2}$.

Lösning: $\sum_{k=5}^{100} \frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=5}^{100} k =$
$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}((5+6+...+100)+(100+99+...+5)) = \frac{1}{4}\cdot 105\cdot 96 = 105\cdot 24 = 2520.$

3. Lös ekvationen $\ln(x+1)+\ln(x+3) = 3\ln 2$.

Lösning: Förenkla ekvationen till $\ln(x+1)(x+3) = \ln 8$. Eftersom funktionen $\ln x$ är injektiv, är detta ekvivalent med $(x+1)(x+3) = 8$. Denna ekvation har rötter $x = -5$ och $x = 1$. Sätter in rötterna i den ursprungliga ekvationen: för $x = -5$ är $\ln(x+1)$ odefinierad, och $x = -5$ är ingen lösning. Däremot, $x = 1$ är en lösning. Svar: $x = 1$.

4. Lös olikheten $\dfrac{x}{x+2} \geq \dfrac{2}{x-1}$.

Lösning: Olikheten ovan är ekvivalent med

$$\frac{x(x-1)-2(x+2)}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+1)}{(x+2)(x-1)} \geq 0.$$

Denna kan analyseras med hjälp av tabell.
Svar: $x\in(-\infty,-2)$ eller $x\in(-1,1]$ eller $x\in[4,\infty]$.

5. För vilka x gäller $\left|\dfrac{2x+1}{x-2}\right| = 3$?
Lösning: Ekvationen ovan är uppfylld om antingen $\frac{2x+1}{x-2} = 3$ eller $\frac{2x+1}{x-2} = -3$ (kom ihåg att $x \neq 2$). Vi löser den första av ekvationer: $2x+1 = 3(x-2)$. Vi får: $x = 7$. Löser den andra ekvationen: $2x+1 = -3(x-2)$. Det ger $x = 1$.
Svar: $x = 5$ eller $x = 1$.

6. Bevisa med hjälp av induktion att $4^n - 3n - 1$ är jämnt delbart med 9 för varje $n \geq 2$.
Lösning: 1. Verifiera att påståendet gäller för $n = 2$: $4^2 - 3 \cdot 2 - 1 = 9$ delas med 9.
2. Antag att påståendet gäller för något k, dvs $4^k - 3k - 1 = 9a$ för något heltal a. Vi ska använda detta antagande för att bevisa att påståendet gäller även för $k+1$, dvs att $4^{k+1} - 3(k+1) - 1 = 9b$ för något heltal b. Vi skriver om:

$$4^{k+1}-3(k+1)-1 = 4\cdot4^k-3k-4 = 4\cdot4^k-4\cdot3k-4+4\cdot3k-3k = 4(4^k-3k-1)+9k = 4\cdot9a+9k,$$

vilket delas med 9. (I sista omskrivningen har vi använt antagandet.)
Enligt induktionsprincipen, gäller påståendet för alla n.

7. Bestäm alla komplexa rötter till ekvationen

$$z^3 = 1.$$

Skriv rötterna på formen $a + ib$ (d.v.s., på rektangulär form).
Lösning: Om vi sätter $z = re^{i\theta}$, är ekvationen ekvivalent med

$$r^3 e^{i3\theta} = 1 = e^0.$$

Alltså är $r^3 = 1$, $3\theta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. De olika lösningarna blir alltså

$$z = e^{2\pi k/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Svar: $z = e^0 = 1$, $z = e^{2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = e^{4\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Bestäm alla reella tal x som uppfyller alla följande villkor: $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x > 0$, och $\sin x > 0$.
Lösning: Först löser vi ekvationen $\sin(2x - \pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Det har två serier av lösningar:

$$2x - \pi/4 = \pi/4 + 2\pi k \text{ och } 2x - \pi/4 = 3\pi/4 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Den första är ekvivalent med $x = \pi/4 + \pi k$, den andra med $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Eftersom vi har villkoret $x \geq 0$, så tar vi $k \geq 0$. Villkoret $\sin x \geq 0$ är uppfylld för vinklar i intervallen $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$. (Rita de olika lösningarna på enhetscirkeln!)
Talen x som uppfyller alla tre villkor är $x = \pi/2 + 2\pi k$ och för $x = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.