KTH Matematik

Tentamen i SF1643 Tal och Funktioner
Lösningsförslag

1. Lös olikheten $\dfrac{3x}{x+1} \geq 2.$

Lösning.

$$\frac{3x}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} \geq 0.$$

Vi gör en teckentabell för att analysera det sista uttrycket.

x		-1		2	
$x+1$	-	0	+		+
$x-2$	-		-	0	+
$\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$	+	ej def.	-	0	+

Således, olikheten är uppfylld för $x < -1$ och $x \geq 2$.

2. a) Förenkla så långt som möjligt:

$$\frac{\ln{(e^x)}^3 \ln\sqrt{e^x}}{xe^{\ln x}} = \frac{3\ln e^x \frac{1}{2}\ln e^x}{x^2} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

b) Dividera:

$$\frac{2+i}{1+3i} = \frac{(2+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

c) Beräkna:

$$\binom{101}{23} \Big/ \binom{101}{78} = \frac{101!}{23!(101-23)!} \Big/ \frac{101!}{78!(101-78)!} = \frac{101!}{23!78!} \Big/ \frac{101!}{78!23!} = 1.$$

3. a) Lös ekvationen

$$9^{1-2x} = 3^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2(1-2x)} = 3^{x+1} \Leftrightarrow 2(1-2x) = x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

b) Lös ekvationen $\sqrt{2x} = \sqrt{x-2}$. Kvadrera: $2x = x-2 \Leftrightarrow x = -2$.
Verifiera (sätt in $x = -2$ i den ursprungliga ekvationen): $\sqrt{2(-2)}$ ej definierad. Därför är $x = -2$ ej en lösning.
Svar: inga lösningar.

c) Om $5\cos 2x = 1$, vilka värden kan då $\cos x$ anta?

$$5\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 5(2\cos^2 x - 1) = 1 \Leftrightarrow 10\cos^2 x = 6 \Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{6/10}.$$

4. Lös ekvationen $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin 3x$.

Lösning. OBS: $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$. Ekvationen skrivs om:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

Vi har två uppsättningar av lösningar:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

och

$$x + \frac{\pi}{6} = -\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. Lös ekvationen $\left|\frac{x}{x-1}\right| = 3$.

Lösning 1. Här är det snabbaste sättet. Observera att ekvationen $|t| = 3$ betyder: ($t = 3$ eller $t = -3$). Vår ekvation är alltså ekvivalent med:

$$\frac{x}{x-1} = 3 \text{ eller } \frac{x}{x-1} = -3.$$

När man löser det första ekvationen, får man $x = \frac{3}{2}$. När man löser det första ekvationen, får man $x = \frac{3}{4}$. De är de två lösningarna till den ursprungliga ekvationen.

Lösning 2. (Standard sätt.) OBS: $x \neq 1$. Observera också: $\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{|x|}{|x-1|}$. Enligt definitionen,

$$|x| = \begin{cases} x \text{ om } x \geq 0 \\ -x \text{ om } x < 0 \end{cases} \quad ; \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ om } x \geq 1 \\ -(x-1) \text{ om } x < 1 \end{cases} .$$

Vi får betrakta tre fall: Fall 1: $x < 0$. Här $|x| = -x$, $|x-1| = -(x-1)$; evationen blir

$$\frac{-x}{-(x-1)} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Verifiera att x ligger i Fall 1: $x = \frac{3}{2} < 0$ stämmer ej. Ingen lösning i detta fall.
Fall 2: $0 < x < 1$. Här $|x| = x$, $|x-1| = -(x-1)$; evationen blir

$$\frac{x}{-(x-1)} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Verifiera att $x = \frac{3}{4}$ ligger i Fall 2: $0 < \frac{3}{4} < 1$ stämmer. $x = \frac{3}{4}$ är en lösning.
Fall 3: $x > 1$. Här $|x| = x$, $|x-1| = (x-1)$; evationen blir

$$\frac{x}{(x-1)} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Verifiera att $x = \frac{3}{2}$ ligger i Fall 3: $\frac{3}{2} > 1$ stämmer. $x = \frac{3}{2}$ är en lösning.

6. Bevisa med hjälp av induktion att för varje $n \geq 1$ gäller formeln

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2+j} = \frac{n}{n+1}.$$

Lösning.
Bas: (verifierar påståended ovan för $n = 1$): $\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j^2+j} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ stämmer.
Induktionssteg: Antag att för något k gäller:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2+j} = \frac{k}{k+1}.$$

Under det antagandet visa att

$$VL(k+1) := \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j^2+j} = \frac{k+1}{k+2} := HL(k+1).$$

$$\begin{aligned} VL(k+1) &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j^2+j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2+j} + \frac{1}{(k+1)^2+k+1} = \\ & \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2+k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ & \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = HL(k+1) \end{aligned}$$

Enligt Induktionsprincipen, fungerar formeln för alla $n \geq 1$.

7. Bestäm alla komplexa rötter till ekvationen

$$z^3 = 5i.$$

Skriv rötterna på formen $a + bi$ (d.v.s., på rektangulär form).
Lösning. Skriv om $5i$ på exponential form: $5i = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Sök z på formen $z = re^{i\theta}$:

$$(re^{i\theta})^3 = r^3 e^{i3\theta} = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Det ger oss:

$$r = 5^{\frac{1}{3}}, \quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k, \quad k = 0, 1, 2.$$

På rektangulär form:
$z_0 = 5^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi}{6}} = 5^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 5^{\frac{1}{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$;
$z_1 = 5^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi} = 5^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 5^{\frac{1}{3}}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$;
$z_2 = 5^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}\pi} = 5^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -i5^{\frac{1}{3}}$.

8. Avgör vilket som är störst:

$$\sum_{j=3}^{22} 25j \quad \text{eller} \quad \sum_{j=0}^{12} \binom{12}{j} 3^j.$$

Lösning.

$$\sum_{j=3}^{22} 25j = 5^2 \sum_{j=3}^{22} j = 5^2 \frac{((3+4+\cdots+21+22)+(22+21+\cdots+4+3))}{2} =$$

$$5^2 \frac{(3+22)20}{2} = 5^5 \cdot 2.$$

Talet “20” i uträkningen ovan är antalet termer i vår summa. Varför 20?—om vi räknar alla tal $1, 2, 3 ... 22$, så är det 22 st., i summan ovan är det 2 st. färre termer.

För att beräkna nästa summa, använd Binomialsatsen:

$$\sum_{j=0}^{12} \binom{12}{j} 3^j = (3+1)^{12} = 4^{12} = 16^6.$$

Enkelt att se att $5^5 \cdot 2 < 16^6 = 16^5 \cdot 16$.
Svar: den andra summan är större.