KTH, Matematik
Maria Saprykina

Tentamen i SF1643, Tal och Funktioner, 12-01-2011 .

Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 3 poäng vardera. Fullständiga lösningar krävs för full poäng. Motivera väl och skriv prydligt och ordentligt. Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Preliminära betygsgränser: A–22 poäng, B–20, C–18, D–15, E–12, Fx–10. Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@math.kth.se).

1 a). Beräkna exakt $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Lösning: $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)$. Kom ihåg: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$. Därför $\cos^2 x = \frac{\cos 2x+1}{2}$, och för $2x = t$ får vi $\cos^2\frac{t}{2} = \frac{\cos t+1}{2}$.

I vårt problem: $\cos^2\frac{\pi}{12} = \cos^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$. Slutligen, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$. Vi tog roten med "$+$" eftersom vinkeln $\frac{\pi}{12}$ är mindre än $\frac{\pi}{2}$ till absolutbelopp, och har därför positiv cosinus.

1 b). Bestäm värdet $\sin\left(2\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)$.

Lösning: $\sin\left(2\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\sin\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)\cdot\cos\left(\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)$. Vidare, $\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$ är en vinkel mellan 0 och $\pi/2$ vars tangens är $3/4$. Man kan använda rätvinklig triangel för att beräkna att $\sin\arctan\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{5}$, $\cos\arctan\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$.
Svar: $\sin\left(2\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

2. Lös följande ekvationer:
a). $\ln\sqrt{6+e^x} = x$.
Lösning: Eftersom logaritmfunktionen är injektiv, är detta ekvivalent med $\sqrt{6+e^x} = e^x$. Beteckna $y = e^x$ (kom ihåg att beteckningen kräver att $y > 0$). Vi får ekvationen

$$\sqrt{6+y} = y.$$

Kvadrera: $6 + y = y^2$. Rötterna är $y = 3$ och $y = -2$. Vi måste verifiera att rötterna löser ekvationen $\sqrt{6+y} = y$. Roten $y = 3$ passar. Roten $y = -2$ uppfyller ändå inte kravet $y > 0$, och är därför ointressant.
Svar: $x = \ln 3$.

b). $3^{3x} = 27 \cdot 9^x \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^3 \cdot (3^2)^x \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{3+2x}$. Eftersom exponentialfunktionen är injektiv, är detta ekvivalent med $3x = 3 + 2x$. Lösningen är $x = 3$.
c). $\ln x + \ln(x - 1) = \ln(x + 3)$.
Lösning: Ekvationen kan skrivas om: $\ln x(x - 1) = \ln(x + 3)$. Eftersom logaritm-funktionen är injektiv på dess definitionsmängd, är detta ekvivalent med $x(x-1) = x+3$ (OBS: ekvivalensen gäller bara för de x där båda ekvationer har mening). Den sista ekvationen har rötter $x = 3$ och $x = -1$. Verifiera att rötterna uppfyller den ursprungliga ekvationen. För $x = -1$ har ekvationen ingen mening, därför -1 är ingen rot. Insättning av $x = 3$ ger rätt identitet.
Svar: $x = 3$.

3. Lös ekvationen $\cos x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.
Ekvationen kan skrivas om:

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right).$$

Denna har 2 serier av lösningar. Den första är $x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, vilket ger, efter omskrivning,

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Den andra är $-x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, vilket ger, efter omskrivning,

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. Lös ekvationen $|x + 1| + |x - 2| = 5$.
Lösning: Enligt definition, $|x+1| = x+1$ för $x \geq -1$ och $|x+1| = -(x+1)$ för $x < -1$. På samma sätt, $|x-2| = x-2$ för $x \geq 2$ och $|x-2| = -(x-2)$ för $x < 2$. Betrakta 3 fall.
Fall 1: $x < -1$. Ekvationen har formen $-(x + 1) - (x - 2) = 5$. Denna har roten $x = -2$, som ligger i intervallet $x < -1$. -2 är en rot till den ursprungliga ekvationen.
Fall 2: $-1 \leq x < 2$. Ekvationen har formen $(x + 1) - (x - 2) = 5$. Denna har inga rötter.
Fall 3: $x \geq 2$. Ekvationen har formen $(x + 1) + (x - 2) = 5$. Denna har roten $x = 3$, som ligger i intervallet $x \geq 2$. 3 är en rot till den ursprungliga ekvationen.
Svar: Ekvationen har rötter $x = -2$ and $x = 3$.

5. Beräkna den aritmetiska summan $1 + 5 + 9 + \cdots + 89$.

Lösning: Vi behöver veta antal termer, n, i summan ovan. Term nummer k i summan har form $1 + 4(k - 1)$. Sista termen är $89 = 1 + 4(n - 1)$, och därför ar antal termer $n = 23$. Hela summan är $S = \frac{23\cdot(1+89)}{2} = 45 \cdot 23$.

6. Lös olikheten $x + \dfrac{6}{x} < 5$.

Skriv om olikheten:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x} < 0.$$

Tecknet hos vänsterled kan undersökas med hjälp av teckentabell.
Svar: Olikheten är uppfylld för $x \in (-\infty, 0)$ eller $x \in (2, 3)$.

7. Bestäm alla komplexa rötter till ekvationen $z^3 = 2\sqrt{2}i$.
Lösning. Skriv om HL på polär form: $2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/2}$. Sök z på formen $z = re^{i\theta}$:

$$(re^{i\theta})^3 = r^3 e^{3i\theta} = 2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/2}.$$

Det ger oss:

$$r = \sqrt{2}, \quad 3\theta = \pi/2 + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, \quad k = 0, 1, 2.$$

På rektangulär form:

$$z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = \sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right),$$
$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{2}(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = \sqrt{2}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right),$$
$$z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2}(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}) = -\sqrt{2}i,$$

8. Visa med hjälp av induktion att talet $(8^n - 1)$ är delbart med 7 för alla $n \geq 1$.
Lösning. Verifiera att påståendet ovan gäller för $n = 1$: $8^1 - 1 = 7$ är delbart med 7—rätt.

Vidare, anta att för något k gäller: $(8^k - 1)$ är delbart med 7, dvs $(8^k - 1) = 7a$ för något heltal a. Vi verifierar att under detta antagande gäller även att $(8^{k+1} - 1)$ är delbart med 7.

$$8^{k+1} - 1 = 7 \cdot 8^k + 8^k - 1 = 7 \cdot 8^k + 7a.$$

Vid sista steget har vi använt induktionsantagandet. Talet $7 \cdot 8^k + 7a = 7(8^k + a)$ är delbart med 7, och induktionssteget är klart.

Induktionsprincipen medför att påståendet gäller för alla n.